Matemática Discreta
Relações e Funções

Prof. Leandro Israel Pinto

Cronograma

- Tipos de Relações
- Função Parcial
- Função Total

Tipos de Relações

- Funcional
- Injetora
- Total
- Sobrejetora
- Isorelação
- Bijeção

Relações: Funcional

- Seja $R: A \to B$. Então R é uma relação funcional se e somente se:

$$(\forall a \in A)(\forall b_1 \in B)(\forall b_2 \in B)(a \ \mathrm{R} \ b_1 \land a \ \mathrm{R} \ b_2 \to b_1 = b_2)$$

- Cada elemento de A está relacionado com, no máximo, um elemento de B;
- Define Função;

Relações: Injetora

- Seja $R: A \to B$. Então R é uma relação injetora se e somente se:

$$(\forall b \in B)(\forall a_1 \in A)(\forall a_2 \in A)(a_1 \mathrm{~R~} b \wedge a_2 \mathrm{~R~} b \to a_1 = a_2)$$

- Cada elemento de B está relacionado com, no máximo, um elemento de A.

Relações: Total

- Seja $R: A \to B$ uma relação. Então R é uma relação total se e somente se:

$$(\forall a \in A)(\exists b \in B)(a \mathrel{\mathrm{R}} b)$$

- Todos os elementos de A estão relacionados com algum elemento de B;
- O domínio é o próprio conjunto A.

Relações: Sobrejetora

- Seja $R: A \to B$ uma relação. Então R é uma relação sobrejetora se e somente se:

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(a \mathrm{\ R\ } b)$$

- Todos os elementos de B estão relacionados com algum elemento de A;
- A imagem é o próprio conjunto B.

- Seja $R: A \to B$ uma relação. Então R é uma isorelação se e somente se existe $S: B \to A$ tal que:

$$S \circ R = id_A \text{ e } R \circ S = id_B$$

Onde $\mathrm{id}_A : A \to A$

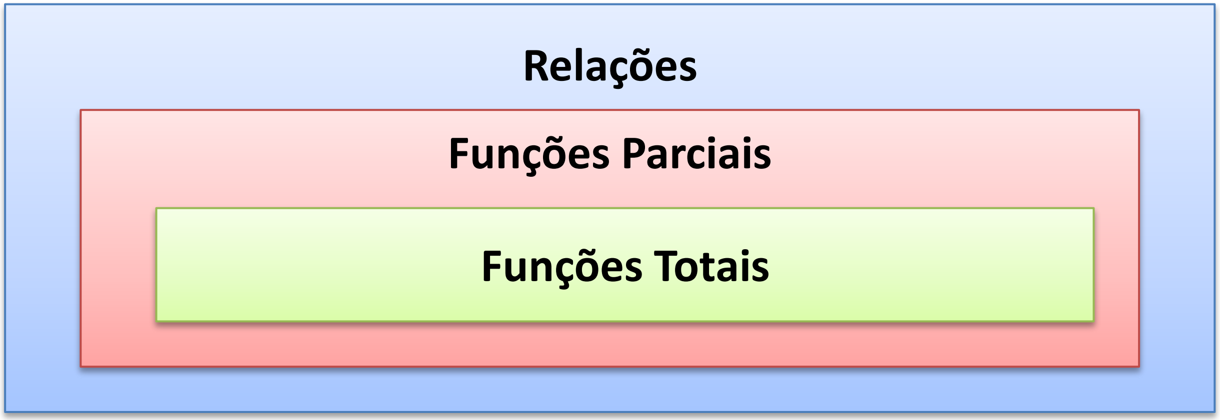
Podemos enfatizar uma isorelação assim:

$$R : A \leftrightarrow B$$

- É isorelação se e somente se for, simultaneamente:
  - Total
  - Injetora
  - Funcional
  - Sobrejetora

- Sendo $A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{0,1,2\}$
- Analise e justifique por que são ou não relações funcionais, injetoras, sobrejetoras e/ou isorelações:
  - $\emptyset: A \rightarrow B$
  - $\{(0, a), (1, b)\}: C \rightarrow B$
  - $=: A \rightarrow B$
  - $<: C \rightarrow C$
  - $A \times B = A \rightarrow B$

- Toda função é uma relação
- Nem toda relação é uma função parcial



Estudo das Funções

- Destacado do estudo das relações
- Importante para a matemática e computação
- Na computação, função parcial é tão ou mais importante que função total

Função Parcial

- É uma relação **funcional**:

O que significa?

$$f \subseteq A \times B$$

Pode pertencer a f alguns ou todos os elementos de AxB

- Denotada por:

$$f : A \nrightarrow A$$

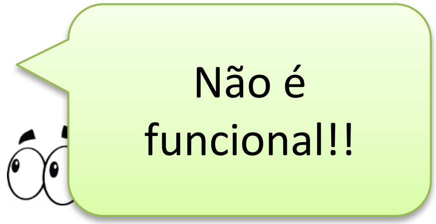
- O par $(a, b) \in f$ é usualmente denotado por:

$$f(a) = b$$

Função Parcial Dual

- Sejam $A = \{0,1,2\}$ e a endofunção parcial $f: A \nrightarrow A$ tal que $f = \{(0,2),(1,2)\}$. Então:

$$f^{-1} = \{(2,0),(2,1)\}$$



- Se f for funcional e injetora então f^{-1} é também?
  - Testa aí...

Resolva

- Sendo $A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{0,1,2\}$
- As funções a seguir são parciais? Conte-me por quê:
  - $\emptyset: A \to B$
  - $\{(0, a), (1, b)\}: C \to B$
  - $=: A \to B$
  - $<: C \to C$
  - $A \times B = A \to B$

- Para uma dada função parcial podemos definir uma restrição
  - A partir de um subconjunto do seu domínio
- É uma operação sobre funções
  - Importante quando aplicada sobre sistemas

- Restrição do domínio de uma função parcial
- Seja $f: A \nrightarrow B$ e A_0 um conjunto tal que $A_0 \subseteq A$. A restrição do domínio de f relativamente a A_0 é denotada por:

$$f \backslash A_0 : A_0 \rightarrow B$$

Tal que:

$$f \backslash A_0 = f \cap (A_0 \times B)$$

- Sendo $A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{0,1,2\}$

- $R = \{(0, a), (1, b)\}: C \to B$
  - $R \backslash \{0\} = \{(0, a)\}: \{0\} \to B$

Função Total

- Simplesmente uma função parcial que é total;
- $f: A \to B$ que é total;
- Definida para todos os elementos do domínio;
- Ex.:
  - Sendo $A = \{a\}, B = \{a, b\}$
  - $=: A \to B$

Referências

- MENEZES, Paulo Blauth. **Matemática discreta para computação e informática.** 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. 258 p. (Livros didáticos informática ufrgs ; 16). ISBN 9788577802692 (broch.)