Reticulados e Álgebra Booleana

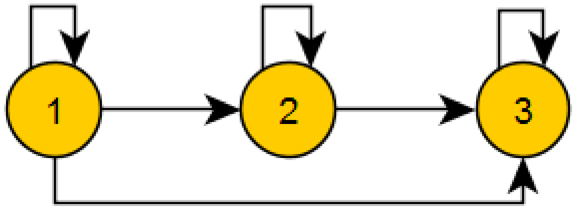
Prof. Leandro Israel Pinto

Cronograma

- Introdução
- Relação de Ordem
- Diagrama de Hasse
- Limitantes de Conjuntos Parcialmente Ordenados
- Reticulados
  - Como relação de Ordem
  - Como Álgebra

- Continua o estudo de álgebra, mas em um contexto mais abstrato;
- Correlação existente entre lógica e álgebra de conjuntos;
  - Ambas são um caso particular da álgebra de Boole
  - Apresentada por George Boole (1815-1864) em 1854
- Relações de ordem são fundamentais;
- Reticulados e álgebras booleanas são importantes na computação, engenharia e ciência em geral
  - Primitivas para programação concorrente;
  - Circuitos lógicos ou redes lógicas.

- $R: A \to A$ é uma relação de ordem parcial se R é reflexiva, antissimétrica e transitiva.
- Toda relação de ordem pode ser representada por
  - Grafo
  - Diagrama de Hasse: Omitem-se as arestas que podem ser deduzidas pelas propriedade transitiva e reflexiva.
- Ex.: $\langle\{1,2,3\}, \leq\rangle = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), \ldots\}$



Limitantes de Conjuntos Parcialmente Ordenados

- Para uma dada relação de ordem parcial e para um par de elementos do conjunto em questão, definem-se:
  - Limitante inferior: elemento que antecede os dois do par considerado;
  - Limitante superior: elemento da relação que sucede os dois do par considerado;
  - Não necessariamente são únicos;
- Importantes:
  - O maior limitante inferior (produto)
  - O menor limitante superior (soma)
  - Menor elemento (inicial, antecede todos)
  - Maior elemento (terminal, sucede todos)

Limitantes de Conjuntos Parcialmente Ordenados

- Os conceitos de soma e produto são definidos para pares de elementos da relação de ordem
  - induzindo operações binárias;
  - Poderiam ser generalizados para sequências de elementos de qualquer tamanho

- Limitante inferior, limitante superior, produto, soma;
- Seja $\langle P, R\rangle$ uma relação de ordem parcial, $a \in P$ e $b \in P$. Um elemento $p \in P$ é dito:
- Maior limitante inferior, produto ou ínfimo de a e b se simultaneamente:
  - p é limitante inferior de a e b: pRa e pRb;
  - p sucede os demais limitantes inferiores de a e b:

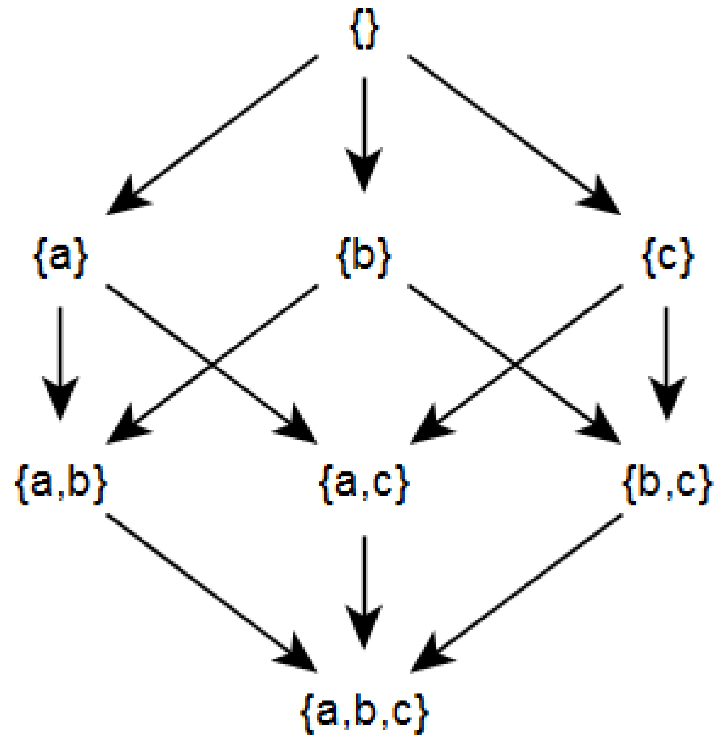
  $(\forall q \in P)(q \text{ é } limitante\ inferior\ de\ a\ e\ b \ \rightarrow qRp)$
- Menor limitante superior, coproduto, soma ou supremo de a e b se simultaneamente:
  - p é limitante superior de a e b: aRp e bRp;
  - p antecede os demais limitantes superiores de a e b:

  $(\forall q \in P)(q \text{ é } limitante\ superior\ de\ a\ e\ b \ \rightarrow pRq)$

- O produto de soma são denotados por $\times$ e $+$ respectivamente
- Ex.: $\langle\{1,2,3\}, \leq\rangle$
  - Para o par 1 e 2:
    - $1 = 1 \times 2$
    - $2 = 1 + 2$
  - Para o par 2 e 2:
    - $2 = 2 \times 2$
    - $2 = 2 + 2$

- Menor e maior elementos, elemento inicial e terminal;
- Seja $\langle P, R \rangle$ uma relação de ordem parcial. Um elemento $p \in P$ é dito:
  - Elemento inicial ou menor elemento se:
$$(\forall a \in P)(pRa)$$
  - Elemento terminal ou maior elemento se:
$$(\forall a \in P)(aRp)$$
- Ex.: $\langle \{1,2,3\}, \leq \rangle$

- Qual a relação de ordem?
- O conjunto {} é o elemento inicial, e o conjunto {a,b,c} é o elemento final
- Para o par {a} e {b}
  - {} é o produto
  - {a,b} é a soma
- Para o par {a,b} e {a,c}?
- Para o par {} e {a,b,c}?



Soma e produto equivalem a união e intersecção

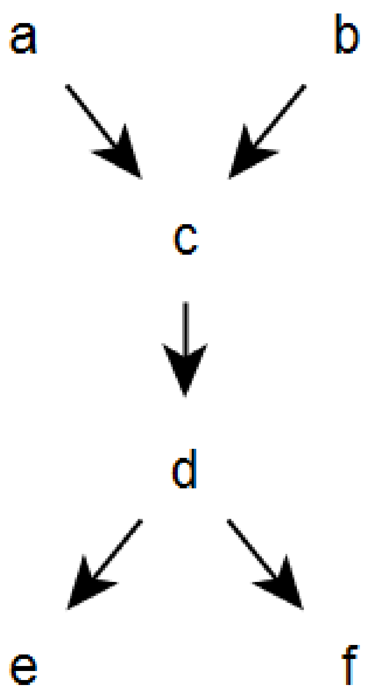
- Definição como relação de ordem
- Um reticulado é um conjunto parcialmente ordenado no qual todo par de elementos do conjunto possui ______________________________;
- Seja $\langle P, R\rangle$ uma relação de ordem parcial. Então $\langle P, R\rangle$ é um reticulado se:

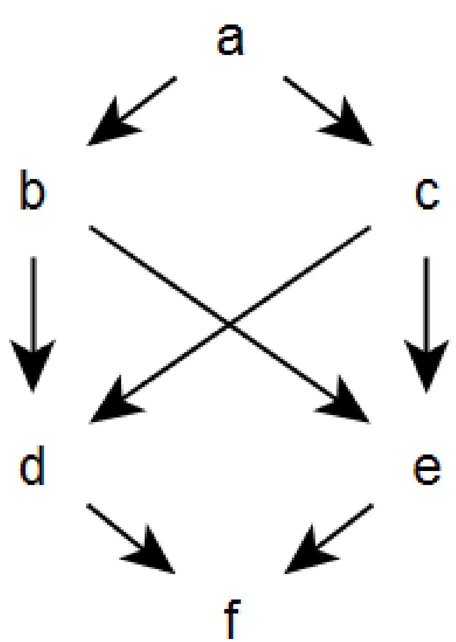
$$(\forall a \in P)(\forall b \in P)(a \times b \in P \land a + b \in P)$$

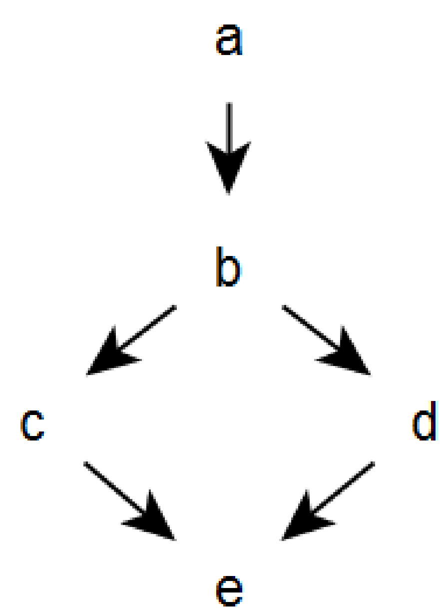
- Definição como relação de ordem
- Um reticulado é um conjunto parcialmente ordenado no qual todo par de elementos do conjunto possui simultaneamente soma e produto;
- Seja $\langle P, R \rangle$ uma relação de ordem parcial. Então $\langle P, R \rangle$ é um reticulado se:

$$(\forall a \in P)(\forall b \in P)(a \times b \in P \wedge a + b \in P)$$

- **Quais são reticulados?**
  - São reticulados se todos os pares possuem soma e produto.







- Num reticulado $\langle P, R\rangle$, o produto e a soma definem duas operações binárias e fechadas $\times: P^2 \to P$ e $+: P^2 \to P$.
- Portanto, as seguinte estruturas constituem grupoides: $\langle P, \times\rangle$ e $\langle P, +\rangle$

Reticulado como Álgebra: Intro

- Para qualquer reticulado $\langle P, R\rangle$ prova-se que $\langle P,\times\rangle$ e $\langle P,+\rangle$:
- Satisfazem a propriedade associativa e comutativa;
- Satisfaz a absorção:

$$a \times (a + b) = a \text{ e } a + (a \times b) = a$$

Prove 🤕🤜

- Sejam $\langle P,\times\rangle$ e $\langle P,+\rangle$ dois semigrupos abelianos. Então a seguinte álgebra com duas operações binárias é um reticulado:

$$\langle P,\times,+\rangle$$

Exemplo

- Operações $\cap$ e $\cup$
- A seguinte estrutura constitui um reticulado:

$$\langle P(A), \cap, \cup \rangle$$

- Sendo $A = \{a, b, c\}$, qual o diagrama de Hasse?

Tipos especiais de reticulados

- Reticulado Distributivo
  - A soma se distribui sobre o produto e vice-versa
- Reticulado Limitado
  - Possui elemento inicial e terminal
- Reticulado Complementado
  - Reticulado limitado no qual cada elemento possui complemento em relação à soma e ao produto

Reticulado Distributivo

- Um reticulado $\langle P, \times, + \rangle$ é dito distributivo se:
- Supondo $a, b, c \in P$

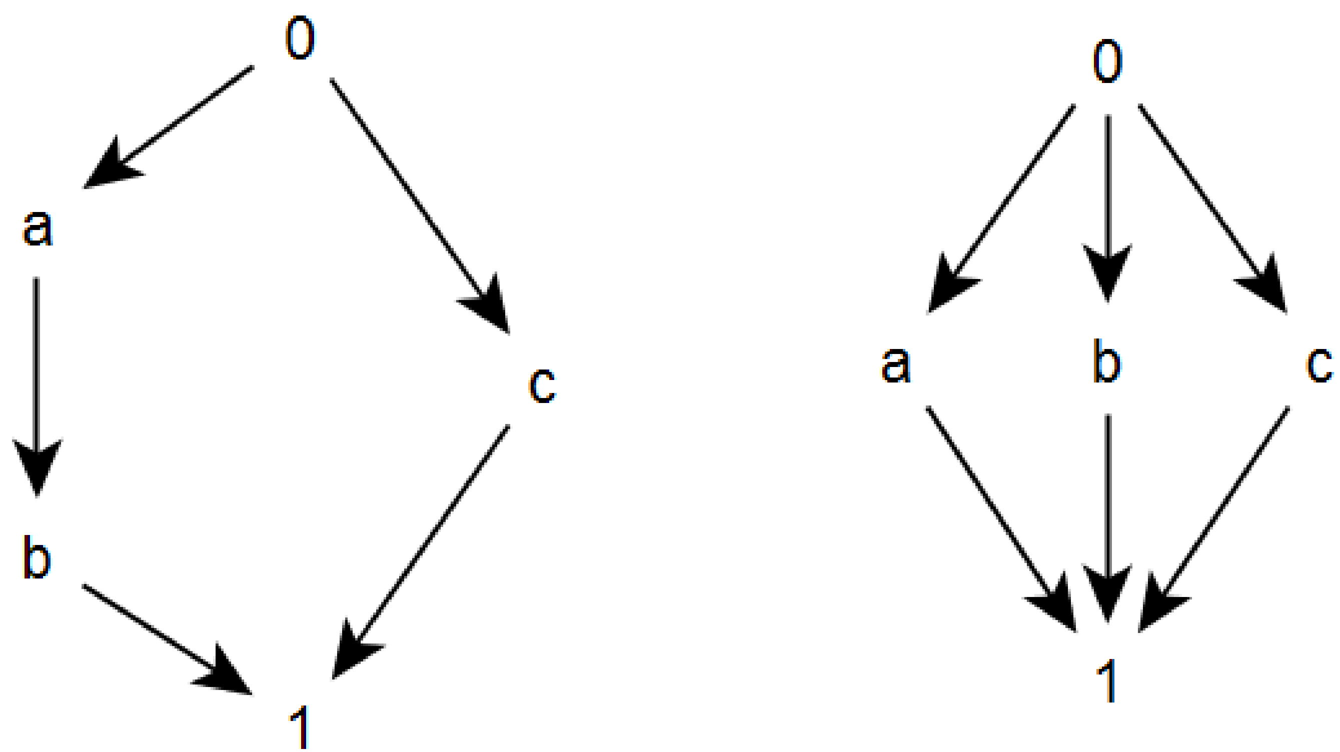
$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

e

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$$

- Basta mostrar uma delas para provar que o reticulado é distributivo

- São ou não distributivos, por quê?



Reticulado Limitado

- Um reticulado $\langle P, \times, + \rangle$ é dito limitado se possui um elemento inicial e terminal
- Ex.:
  - $\langle P, \times, +, 0, 1 \rangle$ é limitado em 0 e 1
  - $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle$ não é limitado, não possui terminal

Reticulado Complementado

- Um reticulado é complementado é um reticulado limitado no qual cada elemento possui complemento em relação a soma (resultando no elemento terminal) e ao produto (resultante no elemento inicial)

Reticulado Complementado

- Seja $\langle P, \times, +, 0,1 \rangle$ um reticulado limitado. Então:
- Um elemento $a' \in P$ é dito complemento de a e vice-versa se:

$$a \times a' = 0 \text{ e } a + a' = 1$$

- Um reticulado é dito complementado se:

$$(\forall a \in P)(\exists a' \in P)(a \times a' = 0 \wedge a + a' = 1)$$

- Nesse caso, o reticulado é denotado:

$$\langle P, \times, +, ', 0,1 \rangle$$

- Particularmente para computação;
- Lógica e álgebra de conjuntos são casos particulares da álgebra booleana.
- Álgebra booleana é usada para modelar circuitos de dispositivos eletrônicos.

- Uma álgebra booleana ou álgebra de Boole é um reticulado distributivo complementado.
- Usualmente denotada assim:

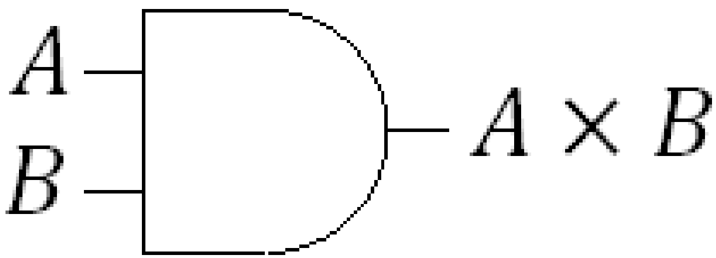
$$\langle P, \times, +, ', 0, 1 \rangle$$

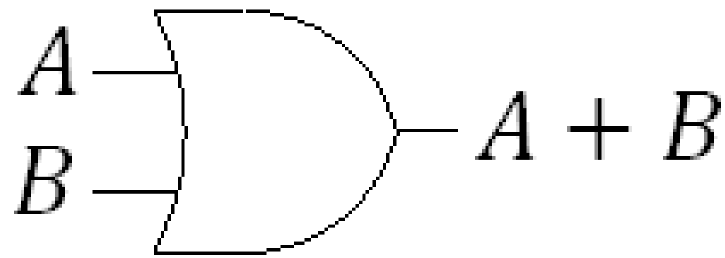
- Por ser um reticulado satisfaz:
  - Associativa
  - Comutativa
  - Absorção Reticulado como Álgebra: Intro
  - Idempotência
    - $a \times a = a$
    - $a + a = a$
- Por ser um reticulado distributivo satisfaz a distributividade.
  - Reticulado Distributivo

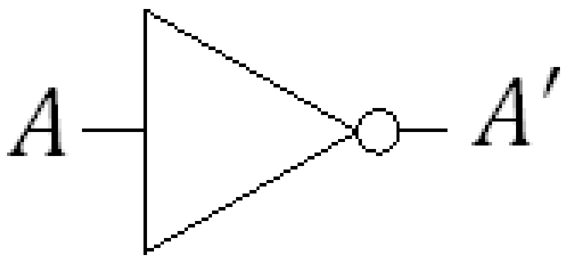
- Por ser um reticulado complementado (e consequentemente limitado) satisfaz:
  - Elemento neutro: $a \times 1 = a$ e $a + 0 = a$
  - Elemento absorvente: $a \times 0 = 0$ e $a + 1 = 1$
  - Complemento: $a \times a' = 0$ e $a + a' = 1$
- Adicionalmente podemos verificar as propriedades:
  - Duplo complemento: $(a')' = a$
  - DeMorgan
    - $(a \times b)' = a' + b'$
    - $(a + b)' = a' \times b'$

- 1938 Claude Shannon identificou a forte correlação entre a lógica proposicional e a lógica de circuitos;
- Foi o primeiro a sugerir que a álgebra de booleana poderia unificar as duas abordagens
- Circuitos lógicos podem ser modelados, analisados, testados e otimizados independentemente de sua implementação

Exemplo circuito lógico







- MENEZES, Paulo Blauth. **Matemática discreta para computação e informática.** 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. 258 p. (Livros didáticos informática ufrgs ; 16). ISBN 9788577802692 (broch.)