Técnicas de Demonstração

Prof. Leandro Israel Pinto

- Proposições;
- Operadores lógicos;
- Fórmulas;
- Tabelas-Verdade;
- Condição e Bicondição;
- Implicação e Equivalência;
- Exemplos importantes.

- É uma construção (sentença, frase, pensamento) à qual se pode atribuir verdadeiro ou falso;
  - Um dos valores-verdade: V ou F;
- Para uma proposição p, denota-se por $V(p)$ o valor-verdade de p;
- Ex.:
  - Brasil é um país
  - $3 + 4 < 5$
- Não são exemplos de proposições:
  - Que horas são?

Operadores Lógicos (Conetivos)

- A proposição "Brasil é um país" é atômica;
  - É uma proposição atômica ou simplesmente átomo;
  - Não pode ser decomposta;
- É possível construir proposições mais complexas compondo proposições;
  - Usando operadores lógicos (ou conetivos);
- Exemplo de proposições compostas:
  - Windows é um SO **e** Pascal é uma LP;
  - $A = B$ se e somente se $(A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A)$.

- Negação ($\neg$)
  - Brasil **é** um país ➔ Brasil **não é** um pais;
  - Denotada por $\neg p$ ou $\sim p$
  - Se $\mathrm{V}(p) = V$, então $V(\neg p) = F$
  - Tabela-verdade:

$\boldsymbol{p}$	$\neg\boldsymbol{p}$
V	F
F	V

- Conjunção (e, $\wedge$)
  - $p \wedge q$ ➔ lê-se p e q;
  - Verdadeira apenas quando p e q são simultaneamente verdadeiras
- Disjunção (ou, $\vee$)
  - $p \vee q$ ➔ lê-se p ou q;
  - Verdadeira quando pelo menos uma das proposições é verdadeira.

- Condição ($\rightarrow$)
  - $p \rightarrow q$ ➔ lê-se "se p então q"
  - Ex.: Se hoje chover, então vou ao cinema;
- Bicondição ($\leftrightarrow$)
  - $p \leftrightarrow q$ ➔ lê-se "p se e somente q";
  - Condição nos dois sentidos;
  - Ex.: Windows é um editor de texto se e somente se Pascal é uma planilha eletrônica.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- Fórmulas lógicas ou simplesmente fórmulas são as palavras da linguagem lógica.
- A fórmula é uma sentença lógica corretamente construída sobre o alfabeto cujos símbolos são conetivos, parênteses, identificadores (p, q, r, etc.), constantes, etc.
- Ex.:
  - $p \vee (\neg q)$
  - $(p \wedge \neg) \rightarrow F$

Precedência entre os conetivos

1. Conetivos entre parênteses, dos mais internos para os mais externos;
2. Negação ($\neg$)
3. Conjunção ($\wedge$) e disjunção ($\vee$);
4. Condição ($\rightarrow$);
5. Bicondição ($\leftrightarrow$);

- Explicita todas as combinações possíveis dos valores lógicos das fórmulas atômicas que compõem uma fórmula;
- Cada átomo pode assumir dois valores: V ou F;
- Para n átomos, temos 2^n linhas na tabela.
- Ex.: $p \vee \neg q$ (Acrescente colunas na ordem que se resolve.)

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q}$
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V

- Seja w uma fórmula. Então:
  - w é dita tautologia se w for verdadeira para todas as combinações possíveis de valores de sentenças variáveis;
  - w é dita contradição se w é falsa para todas as combinações possíveis;
- Ex.:
  - $p \vee \neg p$ é uma tautologia
  - $p \wedge \neg p$ é uma contradição

- Sejam p e q duas fórmulas. Então p implica q, denotado por

$$p \Rightarrow q \text{ ou } p \vDash q$$

Se e somente se:

$$p \rightarrow q \text{ é uma tautologia.}$$

Implicação - Exemplo

- $p \Rightarrow p \vee q$
- $p \wedge q \Rightarrow p$

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow p \vee q$	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow p$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V
F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	F	V

- Sejam p e q duas fórmulas. Então p é equivalente a q, denotado por

$$p \Leftrightarrow q$$

Se e somente se:

$$p \leftrightarrow q \text{ é uma tautologia.}$$

A partir daqui…
…exemplos importantes

Ex1. Equivalência - Exercício

- Mostre que $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Ex2. Bicondição X condição

- Mostre a tabela verdade de

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

- Mostre a tabela verdade de

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

- Mostre a tabela verdade de

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \neg q \rightarrow F$$

Expressão	Equivalente a	Nome
$P \vee Q$ $P \wedge Q$	$Q \vee P$ $Q \wedge P$	Comutatividade
$(P \vee Q) \vee R$ $(P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R)$ $P \wedge (Q \wedge R)$	Associatividade
$\neg(P \vee Q)$ $\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$ $\neg P \vee \neg Q$	De Morgan
$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	Condicional
P	$\neg\neg P$	Dupla Negação
$P \leftrightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	Definição de equivalência

- Considere

$$n > 1$$

Para cada valor de n, a proposição muda.

- Induz a definição de proposições sobre um conjunto de valores;
- Para cada proposição sobre um conjunto de valores, frequentemente é desejável quantificar os valores considerados.

Quantificadores -Proposição sobre um conjunto

- Seja A um conjunto, uma proposição sobre A é uma proposição cujo valor lógico depende do elemento $x \in A$ considerado.
- São proposições:
  - $n > 1$
  - $n! < 10$
  - $2n$ é impar
- Quais são verdadeiras para qualquer n?
- $p(x)$: descreve alguma propriedade de um elemento x
  - $\{x \in A | p(x) \text{ é } verdadeira\}$

- Para uma determinada $p(x)$, podemos desejar quantificar os valores de x que devem ser considerados;
- Quantificador Universal: ∀
  - $(\forall x \in A)\big(p(x)\big)$
  - $(\forall n \in \mathbb{N})(n < 1)$ ←Falso
- Quantificador Existencial: ∃
  - $(\exists x \in A)\big(p(x)\big)$
  - $(\exists n \in \mathbb{N})(n < 1)$ ←Verdadeiro
- Existe um único: ∃! → $(\exists!\, n \in \mathbb{N})(n < 1)$

Mais proposições

Proposição	Negação Correta	
Vai chover amanhã	É falso que vai chover amanhã Não vai chover amanhã	$C \rightarrow C'$
Pedro é alto e magro	Pedro não é alto ou não é magro Pedro é baixo ou gordo	$A \wedge M \rightarrow$ $(A \wedge M)' = A' \vee M'$
O rio é raso ou está poluído	O rio não é raso e não está poluído	$R \vee P \rightarrow$ $(R \vee P)' = R' \wedge P'$
X e Y são divisíveis por sete	?	?

Referências

- MENEZES, Paulo Blauth. **Matemática discreta para computação e informática.** 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. 258 p. (Livros didáticos informática ufrgs ; 16). ISBN 9788577802692 (broch.)