Matemática Discreta para Ciência da Computação

P. Blauth Menezes

blauth@inf.ufrgs.br

Departamento de Informática Teórica

Instituto de Informática / UFRGS

Matemática Discreta para Ciência da Computação

P. Blauth Menezes

3 – Álgebra de Conjuntos

3.1 Introdução

♦ **Álgebra, desde a sua origem até a sua forma atual**

- refere-se a cálculos

♦ **Desenvolvida de forma informal ou formal**

- praticamente em todos os níveis de escolaridade
- exemplo: operações aritméticas (adição, multiplicação…) sobre $\mathbf{R}$

♦ **Álgebras, em CC, destaca-se a partir de 1950**

- Teoria dos Autômatos e Linguagens Formais

♦ De certa forma, toda a CC é construída sobre álgebras

- Álgebra: denominação alternativa para a Matemática Discreta
  - ⁎ Diretrizes Curriculares do MEC para Computação e Informática

♦ Conceito de Álgebra é introduzido adiante

- informalmente: operações definidas sobre um conjunto
- Álgebra de Conjuntos: operações definidas sobre *todos* os conjunto

♦ Desejável para o estudo da Álgebra de Conjuntos

- Diagramas de Venn: representação diagramática
  - ⁎ auxilia o entendimento dos conceitos e raciocínios
- Paradoxo de Russell: *importante!*

♦ Operações sobre conjuntos

- *Não-Reversíveis*: mais usuais
  - União
  - Intersecção

- *Reversíveis*: especialmente importantes para CC
  - Complemento
  - Conjunto das Partes
  - Produto Cartesiano
  - União Disjunta

Obs: Lógica × Álgebra dos Conjuntos

Relação direta entre conetivos lógicos e operações sobre conjuntos

- facilita muito o estudo da Álgebra de Conjuntos

Conetivo Lógico	Operação sobre Conjuntos
negação	complemento
disjunção	união
conjunção	intersecção

Relação Lógica	Relação sobre Conjuntos
implicação	continência
equivalência	igualdade

- **Propriedades sobre os conetivos são válidas na Teoria dos Conjuntos**
  - substituindo cada conetivo
  - pela correspondente operação sobre conjuntos
  - exemplo
    - idempotência do $\wedge$ e do $\vee$ (da $\cap$ e da $\cup$)
    - comutatividade do $\wedge$ e do $\vee$ (da $\cap$ e da $\cup$)
    - associatividade do $\wedge$ e do $\vee$ (da $\cap$ e da $\cup$)
    - distributividade do $\wedge$ sobre o $\vee$ (da $\cap$ sobre a $\cup$) e vice-versa
    - dupla negação (duplo complemento)
    - DeMorgan
- **Pode-se intuir que provas na Teoria dos Conjuntos**
  - são, em grande parte, baseadas em resultados da lógica

3 – Álgebra de Conjuntos

3.1 Introdução

3.2 Diagramas de Venn

3.3 Paradoxo de Russell

3.4 Operações Não-Reversíveis

- 3.4.1 União
- 3.4.2 Intersecção

3.5 Operações Reversíveis

- 3.5.1 Complemento
- 3.5.2 Conjunto das Partes
- 3.5.3 Produto Cartesiano
- 3.5.5 União Disjunta

3.6 Relação entre Lógica e Álgebra de Conjuntos

3.7 Álgebra de Conj. nas Linguagens de Programação

3.8 Álgebra de Conj. e Teoria da Computação

3.2 Diagramas de Venn

♦ Linguagem diagramática

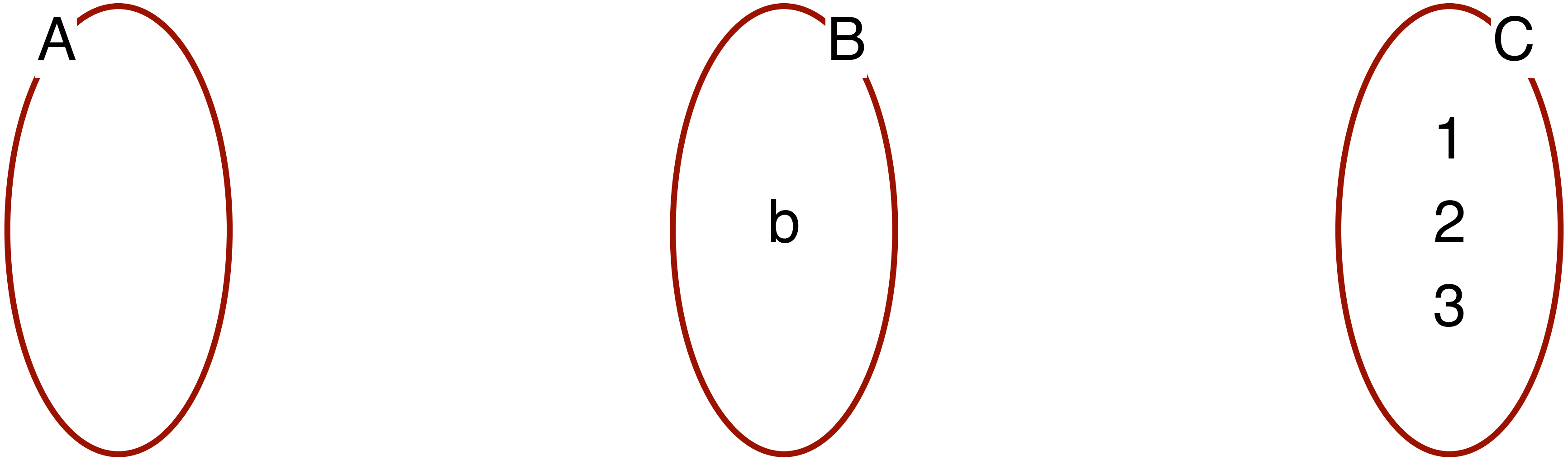
- auxilia o entendimento de definições
- facilita o desenvolvimento de raciocínios
- permite identificação e compreensão *fácil* e *rápida* dos
  - componentes e relacionamentos

♦ Diagramas de Venn

- universalmente conhecidos e largamente usados
- usam figuras geométricas, em geral representadas no plano

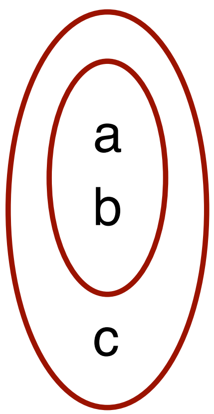
Exp: Diagramas de Venn

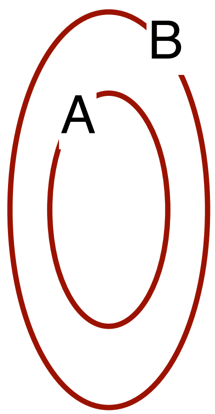
- um dado conjunto A
- um determinado elemento $b \in B$
- o conjunto $C = \{ 1, 2, 3 \}$

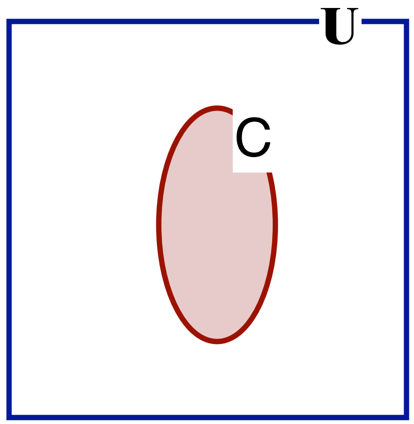


Exp: Diagramas de Venn

- $\{ a, b \} \subseteq \{ a, b, c \}$
- $A \subseteq B$
- para um dado conjunto universo $\mathbf{U}$, um conjunto $C \subseteq \mathbf{U}$





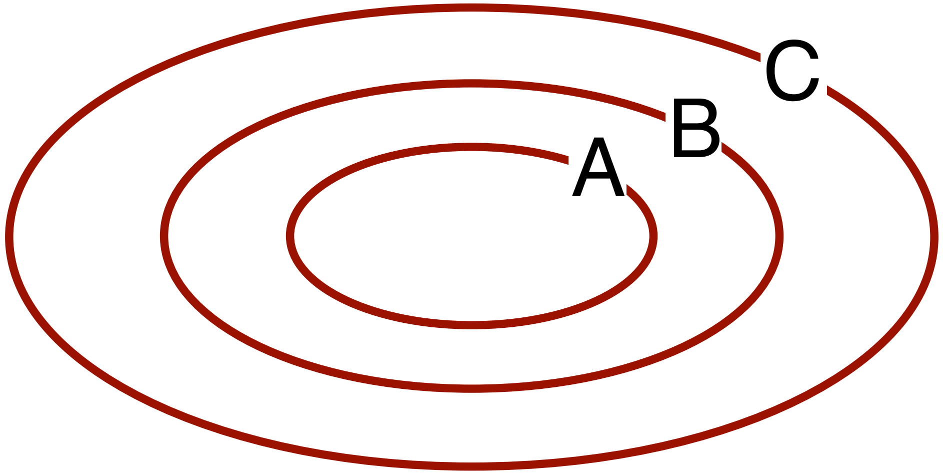


Em geral

- $\mathbf{U}$ é representado por um retângulo
- demais conjuntos por círculos, elipses, etc
- em $C \subseteq \mathbf{U}$, o conjunto C é destacado, para auxiliar visualmente

Exp: Aplicação dos Diagramas de Venn

Considere que



pode-se intuir que a noção de subconjunto é transitiva, ou seja

$$A \subseteq B \land B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

Teorema: Transitividade da Continência

Suponha A, B e C conjuntos. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$

Prova: (*direta*)

($X \subseteq Y$ sss todos os elementos de X também são de Y)

Suponha que A, B e C são conjuntos qq e que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$

Seja $a \in A$. Então:

- $a \in A \Rightarrow$ pela definição de subconjunto, dado que $A \subseteq B$
- $a \in B \Rightarrow$ pela definição de subconjunto, dado que $B \subseteq C$
- $a \in C$

Portanto, para qq $a \in A$, $a \in C$

Logo, pela definição de subconjunto, $A \subseteq C$

∗ como fica a demonstração se A for vazio?

∗ neste caso, não existe elemento $a \in A$…

3 – Álgebra de Conjuntos

3.1 Introdução
3.2 Diagramas de Venn
3.3 Paradoxo de Russell
3.4 Operações Não-Reversíveis
    3.4.1 União
    3.4.2 Intersecção
3.5 Operações Reversíveis
    3.5.1 Complemento
    3.5.2 Conjunto das Partes
    3.5.3 Produto Cartesiano
    3.5.6 União Disjunta
3.6 Relação entre Lógica e Álgebra de Conjuntos
3.7 Álgebra de Conj. nas Linguagens de Programação
3.8 Álgebra de Conj. e Teoria da Computação

3.3 Paradoxo de Russell

Conjunto

coleção de zero ou mais elementos distintos os quais não possuem qualquer ordem associada

Existem conjuntos de conjuntos. Então:

um conjunto pode ser elemento de si mesmo?

Def: Conjunto ordinário

- conjunto que *não* pertence a si mesmo

♦ A definição

$$S = \{ A \mid A \text{ é um conjunto ordinário} \}$$

conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos

- determina uma contradição
- Paradoxo de Russell

Teorema: Paradoxo de Russell

Não é conjunto

$$S = \{ A \mid A \text{ é um conjunto ordinário} \}$$

Prova: (*por absurdo*)

Negação da tese. Suponha que S *é* um conjunto

Construção da contradição. S é um elemento de si mesmo?

Caso 1. Suponha que $S \in S$

- $S \in S \Rightarrow$ pela definição de conj. ordinário
- S não é um conj. ordinário $\Rightarrow$ pela definição de S
- $S \notin S$

Caso 2. Suponha que $S \notin S$

- $S \notin S \Rightarrow$ pela definição de conj. ordinário
- S é um conj. ordinário $\Rightarrow$ pela definição de S
- $S \in S$

Contradição!!! Logo, é absurdo supor que S é conjunto

Portanto, S *não* é conjunto

♦ Portanto, a notação por compreensão

- permite definir algo que *não* é um conjunto
- S seria um *subconjunto* do conjunto de todos os conjuntos
- como S não é conjunto

não existe o conjunto de todos os conjuntos

ou seja:

nem toda coleção de elementos constitui um conjunto

♦ Como evitar o paradoxo (se desejado)

- restringir que a, em $\{ a \mid p(a) \}$, assuma valores em um dado A

$$\{ a \in A \mid p(a) \}$$

♦ Importante conseqüência do Paradoxo de Russell

- definição de uma estrutura matemática sobre uma *coleção* de elementos.

♦ Estrutura Matemática Pequena $\times$ Grande

- pequena, se a coleção de elementos *é* conjunto
- grande, se a coleção de elementos *não* é conjunto

♦ Álgebra de Conjuntos

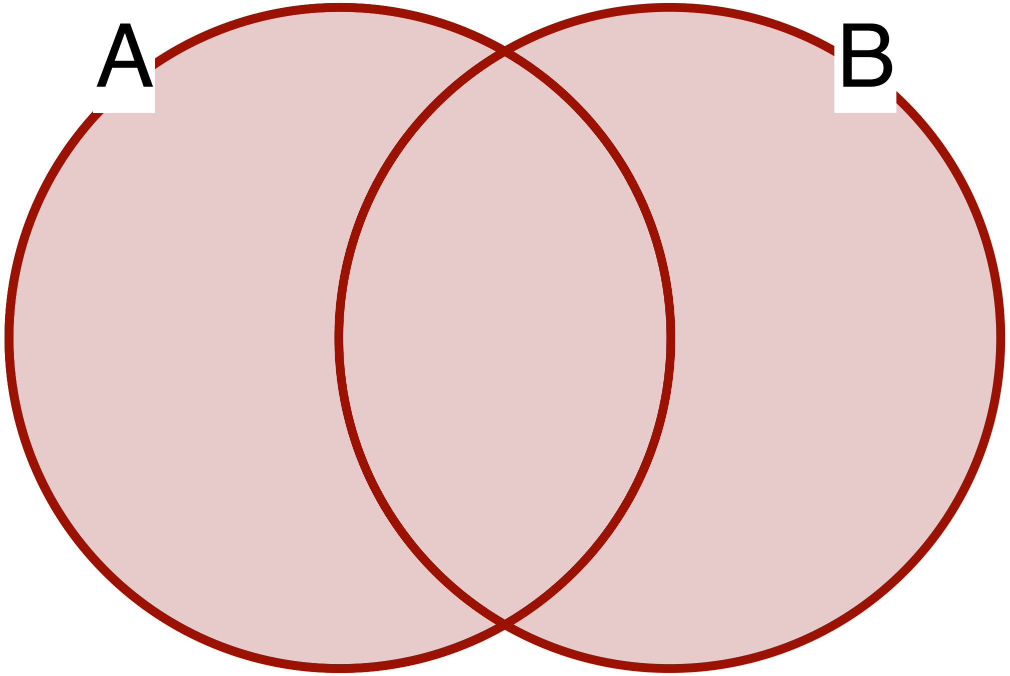
- álgebra grande
- operações sobre a coleção (*não*-conjunto) de todos os conjuntos

3 – Álgebra de Conjuntos

3.4 Operações Não-Reversíveis

As mais comuns nos estudos da Álgebra de Conjuntos

3.4.1 União



Def: União, Reunião

A e B conjuntos

$$A \cup B$$

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \lor x \in B \}$$

Relacionando com a Lógica

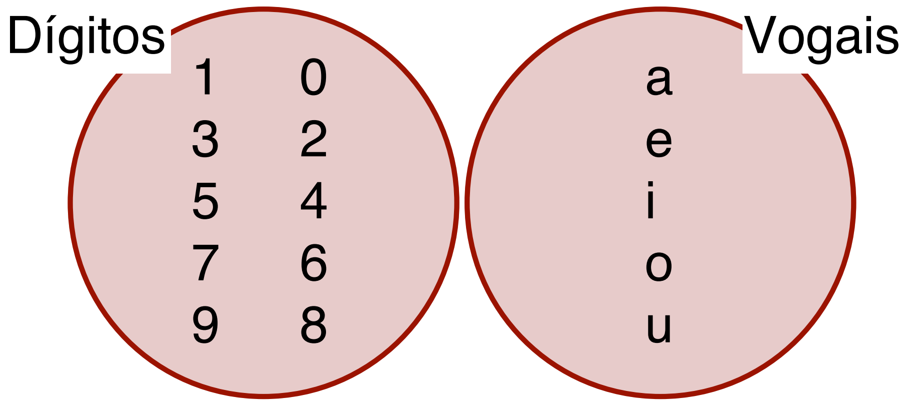
- união corresponde à disjunção
- símbolo $\cup$ lembra símbolo $\lor$

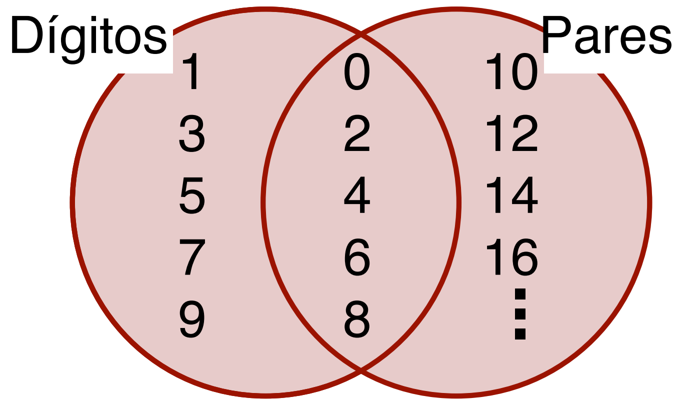
Exp: União

- Dígitos = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }
- Vogais = { a, e, i, o, u }
- Pares = { 0, 2, 4, 6,... }

Dígitos ∪ Vogais = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, e, i, o, u }

Dígitos ∪ Pares = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16,... }





Exp: União

- $A = \{ x \in \mathbf{N} \mid x > 2 \}$, $B = \{ x \in \mathbf{N} \mid x^2 = x \}$

$$A \cup B = \{ 0, 1, 3, 4, 5, 6, \ldots \}$$

- $\mathbf{R}$ (reais), $\mathbf{Q}$ (racionais) e $\mathbf{I}$ (irracionais)

$$\mathbf{R} \cup \mathbf{Q} = \mathbf{R} \qquad \mathbf{R} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R} \qquad \mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$$

- Conjunto universo $\mathbf{U}$ e $A \subseteq \mathbf{U}$

$$\varnothing \cup \varnothing = \varnothing \qquad \mathbf{U} \cup \varnothing = \mathbf{U}$$

$$\mathbf{U} \cup A = \mathbf{U} \qquad \mathbf{U} \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$$

♦ Propriedades da união

Elemento Neutro (qual o elemento neutro da disjunção?)

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$$

(exercício)

Idempotência

$$A \cup A = A$$

(exercício)

Comutatividade

$$A \cup B = B \cup A$$

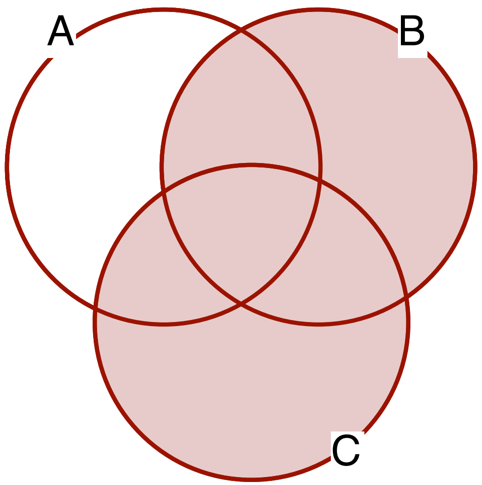
(exercício)

Associatividade

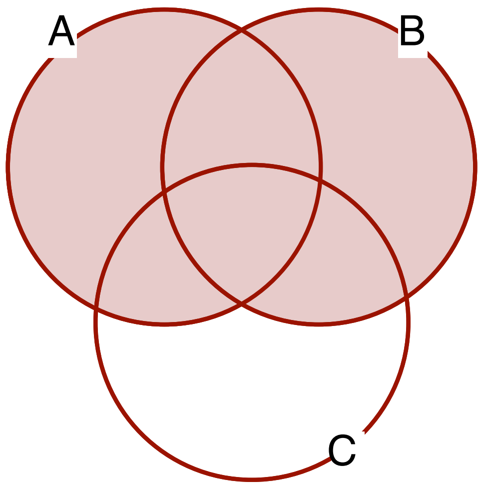
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Associatividade

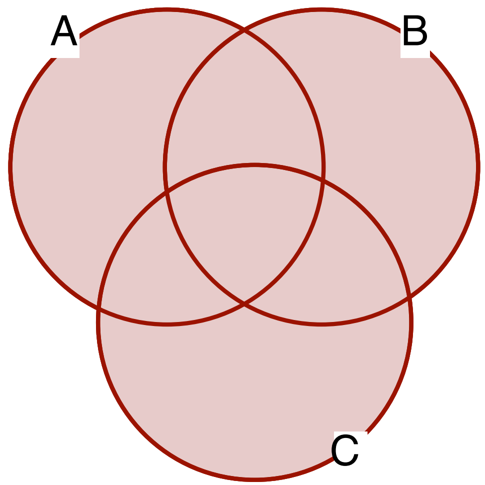
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$



$B \cup C$



$A \cup B$



$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Teorema: Associatividade da União

Suponha que A, B e C são conjuntos quaisquer. Então:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Prova: (*direta*)

($X = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$)

Suponha que A, B e C são conjuntos quaisquer. Dois casos:

- $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$ *caso 1*
- $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$ *caso 2*

Caso 1. Suponha $x \in A \cup (B \cup C)$

- $x \in A \cup (B \cup C) \Rightarrow$ pela definição união
- $x \in A \lor x \in (B \cup C) \Rightarrow$ pela definição união
- $x \in A \lor (x \in B \lor x \in C) \Rightarrow$ pela associatividade do conetivo $\lor$
- $(x \in A \lor x \in B) \lor x \in C \Rightarrow$ pela definição união
- $x \in (A \cup B) \lor x \in C \Rightarrow$ pela definição união
- $x \in (A \cup B) \cup C$

- Portanto, $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

Caso 2. Suponha $x \in (A \cup B) \cup C$

- $x \in (A \cup B) \cup C \Rightarrow$ pela definição união
- $x \in (A \cup B) \vee x \in C \Rightarrow$ pela definição união
- $(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Rightarrow$ pela associatividade do conetivo $\vee$
- $x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Rightarrow$ pela definição união
- $x \in A \vee x \in (B \cup C) \Rightarrow$ pela definição união
- $x \in A \cup (B \cup C)$

- Portanto, $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$

Logo, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

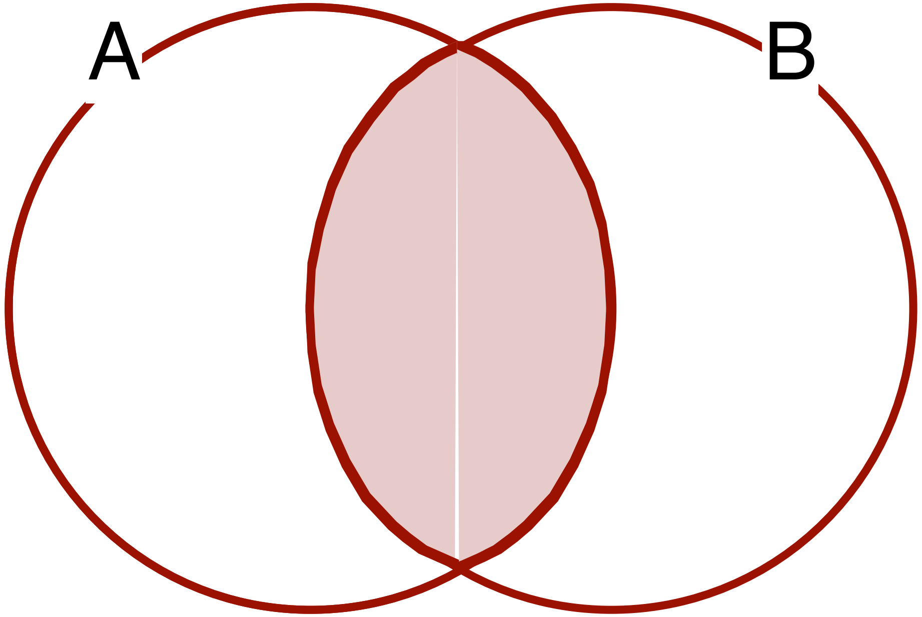
♦ Significado da associatividade?

- *não* existe precedência entre operações de união
- parênteses podem ser omitidos
- $A \cup (B \cup C)$ ou $(A \cup B) \cup C$ pode ser denotado

$$A \cup B \cup C$$

3 – Álgebra de Conjuntos

3.4.2 Intersecção



Def: Intersecção

A e B conjuntos

$$A \cap B$$

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \land x \in B \}$$

♦ Relacionando com a Lógica

- intersecção corresponde à conjunção
- símbolo $\cap$ lembra símbolo $\wedge$

♦ Conjuntos disjuntos

- conjuntos independentes ou conjuntos mutuamente exclusivos
- conjuntos A e B sendo ambos *não*-vazios

$$A \cap B = \varnothing$$

Exp: Intersecção, Conjuntos Disjuntos

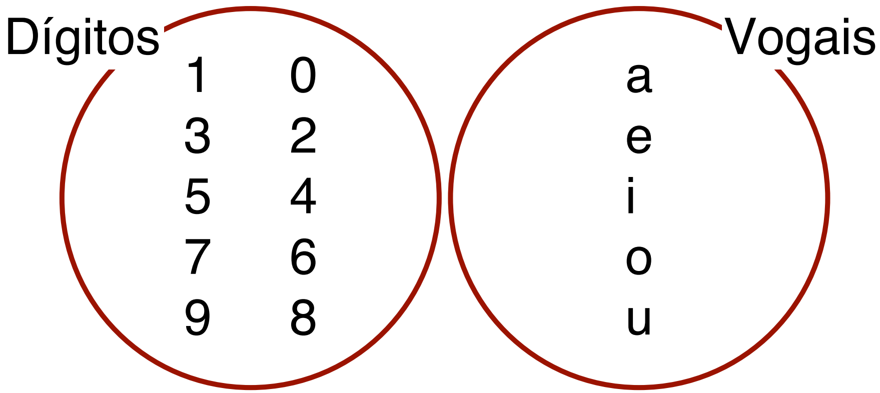
Dígitos = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

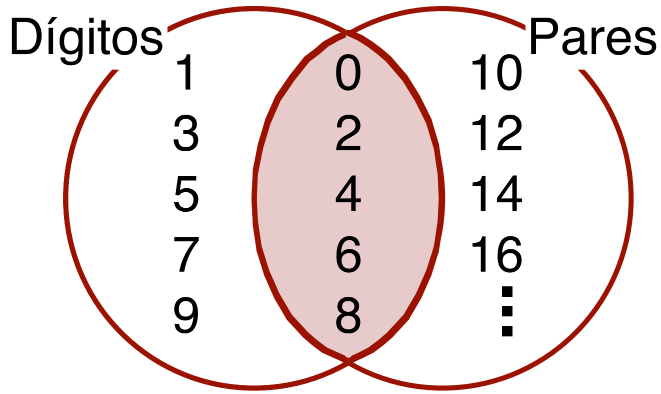
Vogais = { a, e, i, o, u }

Pares = { 0, 2, 4, 6,... }

Dígitos ∩ Vogais = ∅ conjuntos disjuntos

Dígitos ∩ Pares = { 0, 2, 4, 6, 8 }





Exp: Intersecção, Conjuntos Disjuntos

$A = \{ x \in \mathbf{N} \mid x > 2 \}, B = \{ x \in \mathbf{N} \mid x^2 = x \}$

$A \cap B = \varnothing$ conjuntos disjuntos

$\mathbf{R}$ (reais), $\mathbf{Q}$ (racionais) e $\mathbf{I}$ (irracionais)

$\mathbf{R} \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \qquad \mathbf{R} \cap \mathbf{I} = \mathbf{I}$

$\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \varnothing$ conjuntos disjuntos

Conjunto universo $\mathbf{U}$ e $A \subseteq \mathbf{U}$

$\varnothing \cap \varnothing = \varnothing \qquad \mathbf{U} \cap \varnothing = \varnothing$

$\mathbf{U} \cap A = A \qquad \mathbf{U} \cap \mathbf{U} = \mathbf{U}$

♦ Propriedades da intersecção

Elemento Neutro (qual o elemento neutro da conjunção?)

$$A \cap \mathbf{U} = \mathbf{U} \cap A = A$$ (exercício)

Idempotência

$$A \cap A = A$$ (exercício)

Comutatividade

$$A \cap B = B \cap A$$ (exercício)

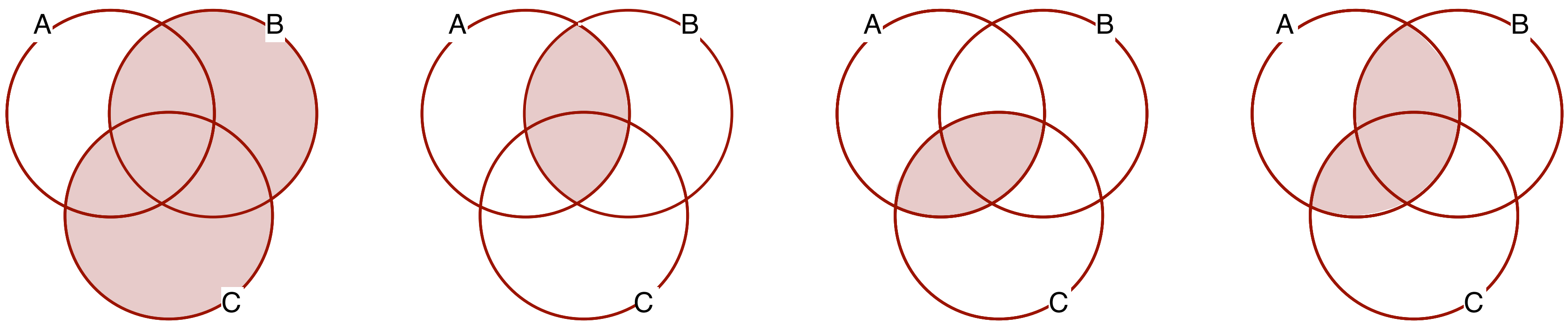
Associatividade

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$ (exercício)

♦ Propriedades da união e da intersecção

Distributividade da intersecção sobre a união

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



$B \cup C$ | $A \cap B$ | $A \cap C$ | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Distributividade da união sobre a intersecção

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Teorema: Distributividade da intersecção sobre a união

Suponha que A, B e C são conjuntos quaisquer. Então:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Prova: (*direta*)

Suponha que A, B e C são conjuntos quaisquer. Então:

- $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow$ pela definição de intersecção
- $x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Leftrightarrow$ pela definição de união
- $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$ pela distributividade do $\wedge$ sobre o $\vee$
- $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow$ pela definição de intersecção
- $x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \Leftrightarrow$ pela definição de união
- $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Logo, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3 – Álgebra de Conjuntos

3.5 Operações Reversíveis

♦ **Operação reversível**

- a partir do resultado, pode-se recuperar os operando originais
- Importante em muitas aplicações na Computação e Informática

Exp: *Back Tracking* (ilustrativo)

Operação de débito e crédito em um terminal bancário automático

- *composição* de diversas pequenas operações componentes

Queda de sistema (luz…) entre duas operações componentes

- sistema poderia ficar inconsistente
- exemplo: débito realizado, mas o crédito, não
- fundamental desfazer o que foi parcialmente feito
- recuperação facilitada quando a operação é reversível

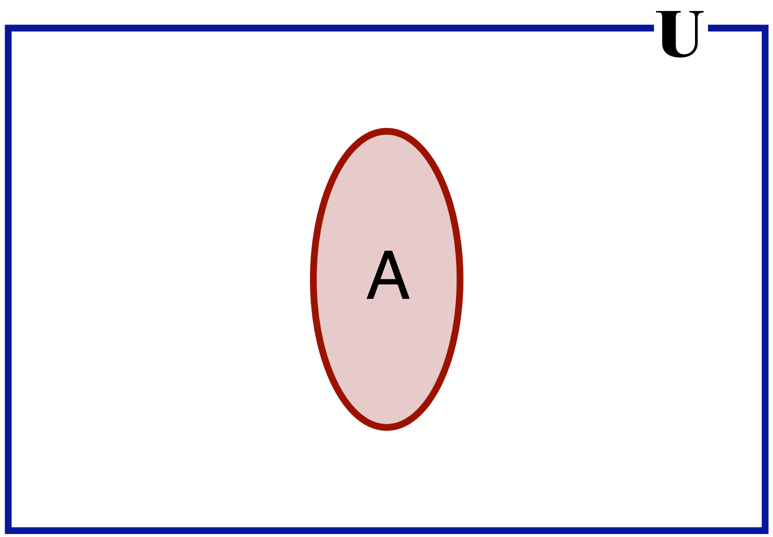
Exp: Construção de Estruturas Complexas (ilustrativo)

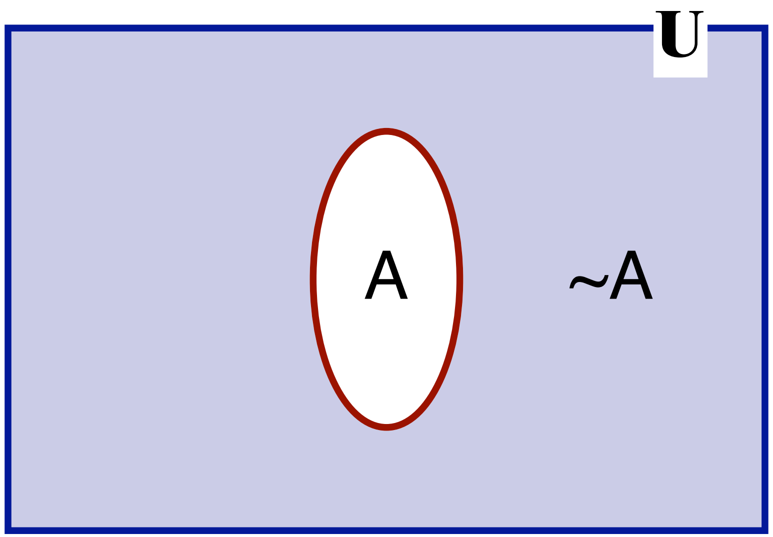
Construção de Estruturas Complexas.

- *compondo* estruturas elementares já conhecidas
- em geral, é desejável que uma alteração realizada em uma estrutura elementar seja *refletida* na estrutura composta
- possível se conhecido os elementos originais da estrutura
- informação facilitada quando a operação é reversível

3 – Álgebra de Conjuntos

3.5.1 Complemento





Def: Complemento

Complemento de um conjunto $A \subseteq \mathbf{U}$

$$A' \quad \text{ou} \quad \sim A$$

$$\sim A = \{ x \in \mathbf{U} \mid x \notin A \}$$

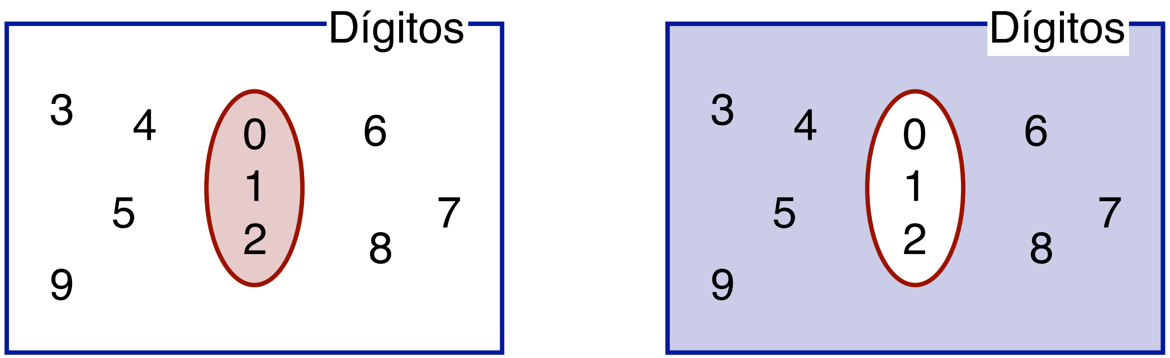
♦ Relacionando com a Lógica

- complemento corresponde à negação
- símbolo ~ é um dos usados para a negação

Exp: Complemento

Dígitos = { 0, 1, 2,..., 9 } conjunto universo e A = { 0, 1, 2 }

- ~A = { 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }



Exp: ...Complemento

$\mathbf{N}$ conjunto universo e $A = \{ 0, 1, 2 \}$

- $\sim A = \{ x \in \mathbf{N} \mid x > 2 \}$

Para qualquer conjunto universo $\mathbf{U}$

- $\sim \varnothing = \mathbf{U}$
- $\sim \mathbf{U} = \varnothing$

$\mathbf{R}$ conjunto universo

- $\sim \mathbf{Q} = \mathbf{I}$
- $\sim \mathbf{I} = \mathbf{Q}$

Exp: Complemento, União e Intersecção

$\mathbf{U}$ conjunto universo. Para qualquer $A \subseteq \mathbf{U}$

- $A \cup \sim A = \mathbf{U}$ — $p \lor \neg p$ é tautologia
- $A \cap \sim A = \varnothing$ — $p \land \neg p$ é contradição

♦ Propriedade Duplo Complemento

- para qualquer $A \subseteq \mathbf{U}$

$$\sim\sim A = A$$

- relacionamento com lógica
  - ∗ A: todos elementos x tais que $x \in A$
  - ∗ $\sim A$: todos elementos x tais que $x \notin A$ — $\neg(x \in A)$
  - ∗ $\sim\sim A$: todos elementos x tais que $\neg\neg(x \in A)$ — $x \in A$

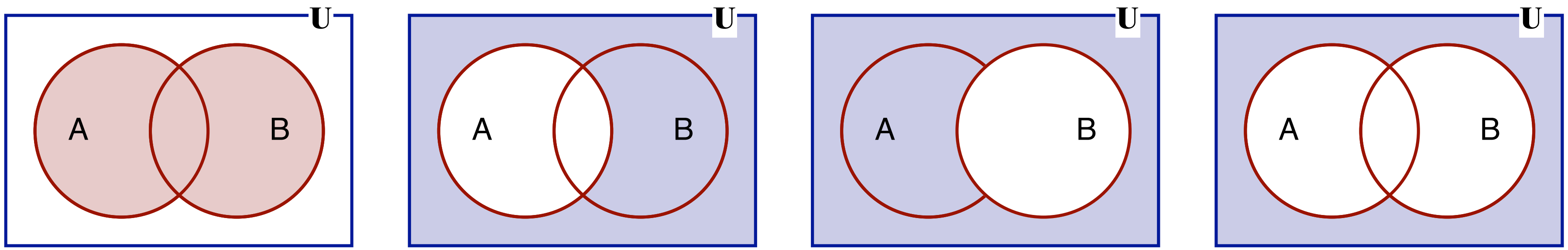
- complemento é reversível: $\sim(\sim A) = A$

♦ Propriedade DeMorgan

- relacionada com o complemento
- envolve a união e a intersecção

$$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B \qquad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

$$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B \qquad \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$



$A \cup B$ $\quad$ $\sim A$ $\quad$ $\sim B$ $\quad$ $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$

♦ Essa propriedade permite concluir

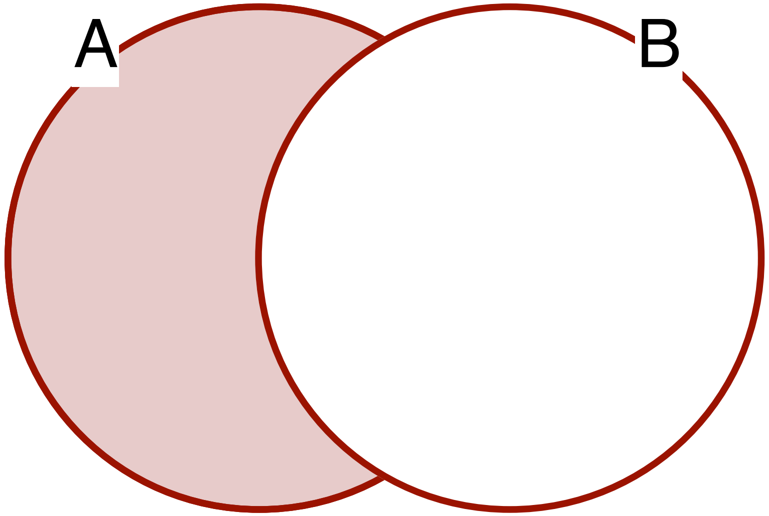
- intersecção pode ser calculada em termos do complemento e união

$$A \cap B = \sim(\sim A \cup \sim B)$$

- união pode ser calculada em termos do complemento e intersecção

$$A \cup B = \sim(\sim A \cap \sim B)$$

♦ Diferença: derivada da intersecção e complemento



Def: Diferença

A e B conjuntos

$$A - B$$

$$A - B = A \cap \sim B = \{ x \mid x \in A \land x \notin B \}$$

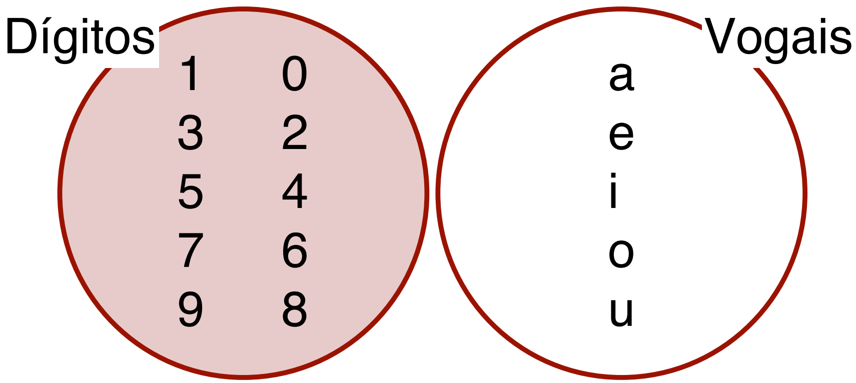
Exp: Diferença

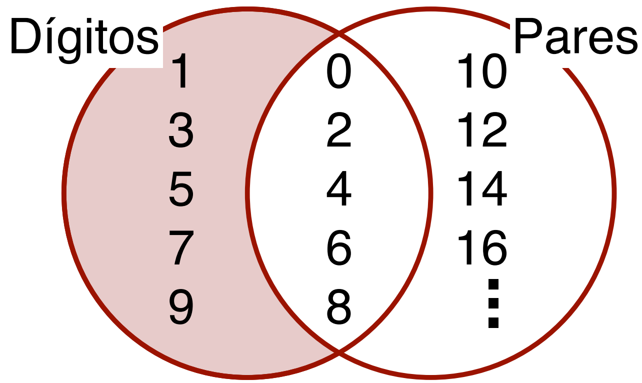
Dígitos = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

Vogais = { a, e, i, o, u }

Pares = { 0, 2, 4, 6,... }

- Dígitos - Vogais = Dígitos
- Dígitos - Pares = { 1, 3, 5, 7,9 }





Exp: …Diferença

$A = \{ x \in \mathbf{N} \mid x > 2 \}$ e $B = \{ x \in \mathbf{N} \mid x^2 = x \}$

- $A - B = \{ 3, 4, 5, 6, \ldots \}$
- $B - A = \{ 0, 1 \}$

$\mathbf{R}$ (reais), $\mathbf{Q}$ (racionais) e $\mathbf{I}$ (irracionais)

- $\mathbf{R} - \mathbf{Q} = \mathbf{I}$
- $\mathbf{R} - \mathbf{I} = \mathbf{Q}$
- $\mathbf{Q} - \mathbf{I} = \mathbf{Q}$

Universo $\mathbf{U}$ e $A \subseteq \mathbf{U}$

- $\varnothing - \varnothing = \varnothing$
- $\mathbf{U} - \varnothing = \mathbf{U}$
- $\mathbf{U} - A = \sim A$
- $\mathbf{U} - \mathbf{U} = \varnothing$

♦ Por que a operação de diferença é não-reversível?

3 – Álgebra de Conjuntos

3.5.2 Conjunto das Partes

♦ **Para um conjunto A**

- $A \subseteq A$
- $\varnothing \subseteq A$

♦ **Para qualquer elemento $a \in A$**

- $\{ a \} \subseteq A$

♦ **Seguindo o racionínio**

- definição de uma operação unária
- Conjunto das Partes
  - aplicada a um conjunto A
  - resulta no conjunto de todos os subconjuntos de A

Def: Conjunto das Partes, Conjunto Potência

A conjunto

$$\mathbf{P}(A) \quad \text{ou} \quad 2^A$$

$$\mathbf{P}(A) = \{ X \mid X \subseteq A \}$$

Exp: Conjunto das Partes

$A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$ e $C = \{ a, b, c \}$

- $\mathbf{P}(\varnothing) = \{ \varnothing \}$
- $\mathbf{P}(A) = \{ \varnothing, \{ a \} \}$
- $\mathbf{P}(B) = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \} \}$
- $\mathbf{P}(C) = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a, b, c \} \}$

Quantos elementos tem $\mathbf{P}(X)$?

Exp: ...Conjunto das Partes

$D = \{ a, \varnothing, \{ a, b \} \}$

- $\mathbf{P}(D) = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ \varnothing \}, \{ \{ a, b \} \}, \{ a, \varnothing \}, \{ a, \{ a, b \} \}, \{ \varnothing, \{ a, b \} \}, \{ a, \varnothing, \{ a, b \} \} \}$

Quantos elementos tem $\mathbf{P}(X)$?

♦ Número de elementos de $\mathbf{P}(X)$

- número de elementos de
  - X é n
  - $\mathbf{P}(X)$ é 2^n
- justifica a notação 2^X
  - prova por indução introduzida adiante

♦ Reversabilidade de $\mathbf{P}(X)$?

- uma solução: união de todos os conjuntos de $\mathbf{P}(X)$
- como fica o cálculo da união se o número de elementos do conjunto das partes for infinito?
  - ∗ *não* será discutido

Exp: Reversabilidade do Conjunto das Partes

Resultante: $\{ \varnothing, \{ a \} \}$

- Operando: $\varnothing \cup \{ a \} = \{ a \}$

Resultante: $\{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \} \}$

- Operando: $\varnothing \cup \{ a \} \cup \{ b \} \cup \{ a, b \} = \{ a, b \}$

Resultante: $\{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a, b, c \} \}$

- Operando: $\varnothing \cup \{ a \} \cup \{ b \} \cup \{ c \} \cup \{ a, b \} \cup \{ a, c \} \cup \{ b, c \} \cup \{ a, b, c \} = \{ a, b, c \}$

Obs: Álgebra de Conjuntos *Pequena*

Álgebra de Conjuntos é uma álgebra *grande*

- operações sobre a coleção (*não*-conjunto) de todos os conjuntos

Se for desejado uma Álgebra de Conjuntos *pequena*??

- definir sobre $\mathbf{P}(\mathbf{U})$
- para cada $\mathbf{U}$, uma álgebra *diferente*
- qq operando A é tal que $A \in \mathbf{P}(\mathbf{U})$

União, intersecção, diferença e complemento

- fechadas sobre $\mathbf{P}(\mathbf{U})$

Conjunto das partes

- *não* necessariamente é fechada sobre $\mathbf{P}(\mathbf{U})$ por quê?

3 – Álgebra de Conjuntos

3.5.3 Produto Cartesiano

♦ Noção de seqüência finita

- necessária para definir produto cartesiano
  - ∗ em particular, seqüência de dois elementos

♦ Seqüência de n componentes: n-upla ordenada

- n objetos (não necessariamente distintos) em uma ordem fixa

♦ 2-upla ordenada ou par ordenado

$$\langle x, y \rangle \quad \text{ou} \quad (x, y)$$

♦ n-upla ordenada

$$\langle x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \rangle \quad \text{ou} \quad (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

- **Não confundir**

$$\langle x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n\rangle \quad \text{com} \quad \{ x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n \}$$

- **A ordem é importante**

$$\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$$

Def: Produto Cartesiano

A e B conjuntos

$$A \times B$$

$$A \times B = \{ \langle a, b\rangle \mid a \in A \text{ e } b \in B \}$$

- **Produto cartesiano de A com ele mesmo**

$$A \times A = A^2$$

Exp: Produto Cartesiano

$$A = \{ a \},\ B = \{ a, b \} \text{ e } C = \{ 0, 1, 2 \}$$

$A \times B = \{ \langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle \}$

$B \times C = \{ \langle a, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle \}$ (não-comut.)

$C \times B = \{ \langle 0, a\rangle, \langle 0, b\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle \}$

$A^2 = \{ \langle a, a\rangle \}$

$B^2 = \{ \langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle \}$

$A \times \mathbf{N} = \{ \langle a, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \ldots \}$

$(A \times B) \times C =$ (não-associatividade)

$\{ \langle\langle a, a\rangle,0\rangle, \langle\langle a, a\rangle,1\rangle, \langle\langle a, a\rangle,2\rangle, \langle\langle a, b\rangle,0\rangle, \langle\langle a, b\rangle,1\rangle, \langle\langle a, b\rangle,2\rangle \}$

$A \times (B \times C) =$

$\{ \langle a,\langle a, 0\rangle\rangle, \langle a,\langle a, 1\rangle\rangle, \langle a,\langle a, 2\rangle\rangle, \langle a,\langle b, 0\rangle\rangle, \langle a,\langle b, 1\rangle\rangle, \langle a,\langle b, 2\rangle\rangle \}$

♦ Conclusões

- *Não-Comutatividade*
  - $B \times C$ e $C \times B$ são *diferentes*
  - $(B \times C) \cap (C \times B) = \varnothing$ disjuntos
- *Não-Associatividade*
  - $(A \times B) \times C$ e $A \times (B \times C)$ são *diferentes* por quê?

Exp: Produto Cartesiano

$A = \{ 0, 1, 2 \}$

- $A \times \varnothing = \varnothing$ por quê?
- $\varnothing \times A = \varnothing$ por quê?
- $\varnothing^2 = \varnothing$

- **Distributividade do produto cartesiano sobre a união**

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$ exercício

- **Distributividade do produto cartesiano sobre a intersecção**

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$ exercício

- **Reversabilidade do produto cartesiano ?**
  - como fazer?
  - nem sempre é válida
    - quando o produto cartesiano resulta no vazio por quê?

Exp: Reversabilidade do Produto Cartesiano

$\{ \langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle \}$

- Operandos: $\{ a \}$ e $\{ a, b \}$

$\{ \langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle \}$

- Operandos: $\{ a, b \}$ e $\{ a, b \}$

$\{ \langle a, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle,\ldots \}$

- Operandos: $\{ a \}$ e $\mathbf{N}$

$\{ \langle\langle a, a\rangle, 0\rangle, \langle\langle a, a\rangle, 1\rangle, \langle\langle a, a\rangle, 2\rangle, \langle\langle a, b\rangle, 0\rangle, \langle\langle a, b\rangle, 1\rangle, \langle\langle a, b\rangle, 2\rangle \}$

- Operandos: $\{ \langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle \}$ e $\{ 0, 1, 2 \}$

3 – Álgebra de Conjuntos

3.5.4 União Disjunta

♦ **Pessoas da família Silva e Souza**

- Silva = { João, Maria, José }
- Souza = { Pedro, Ana, José }

♦ **Conjunto resultante da união**

$$\text{Silva} \cup \text{Souza} = \{ \text{João, Maria, Pedro, Ana, José} \}$$

- José ocorre uma única vez
- *não* reflete uma “reunião familiar”
  - ∗ José Silva *não* é o mesmo José Souza

♦ União disjunta

- *distingue* elementos com mesma identificação
- garante que *não* existem elementos em comum
  - ⁎ associa uma identificação do conjunto origem
  - ⁎ um tipo de "*sobrenome*"

$$\langle \text{elemento, identificação do conjunto origem} \rangle$$

Def: União Disjunta

$$A + B \quad \text{ou} \quad A \uplus B$$

$$A + B = \{ \langle a, A \rangle \mid a \in A \} \cup \{ \langle b, B \rangle \mid b \in B \}$$

$$A + B = \{ \langle a, 0 \rangle \mid a \in A \} \cup \{ \langle b, 1 \rangle \mid b \in B \}$$

$$A + B = \{ a_A \mid a \in A \} \cup \{ b_B \mid b \in B \}$$

♦ Diversas formas de denotar elementos de $A + B$

- importante é distinguir o conjunto originário

Exp: União Disjunta

Silva = { João, Maria, José } e Souza = { Pedro, Ana, José }

$$\text{Silva} + \text{Souza} = \{ \langle \text{João, Silva} \rangle, \langle \text{Maria, Silva} \rangle, \langle \text{José, Silva} \rangle, \langle \text{Pedro, Souza} \rangle, \langle \text{Ana, Souza} \rangle, \langle \text{José, Souza} \rangle \}$$

$D = \{ 0, 1, 2, \ldots, 9 \}$, $V = \{ a, e, i, o, u \}$ e $P = \{ 0, 2, 4, 6, \ldots \}$

$$D + V = \{ 0_D, 1_D, 2_D, \ldots, 9_D, a_V, e_V, i_V, o_V, u_V \}$$

$$D + P = \{ 0_D, 1_D, 2_D, \ldots, 9_D, 0_P, 2_P, 4_P, 6_P, \ldots \}$$

Exp: …União Disjunta

$A = \{ x \in \mathbf{N} \mid x > 2 \}$ e $B = \{ x \in \mathbf{N} \mid x^2 = x \}$

- $A + B = \{ 0_B, 1_B, 3_A, 4_A, 5_A, 6_A, \ldots \}$

$A = \{ a, b, c \}$

- $\varnothing + \varnothing = \varnothing$
- $A + \varnothing = \{ \langle a, A \rangle, \langle b, A \rangle, \langle c, A \rangle \}$
- $A + A = \{ \langle a, 0 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle c, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle \}$

♦ **Reversabilidade da união disjunta?**

Exp: Reversabilidade da União Disjunta

$\{ 0_D, 1_D, 2_D, \ldots, 9_D, a_V, e_V, i_V, o_V, u_V \}$

- Operandos: $\{ 0, 1, 2, \ldots, 9 \}$ e $\{ a, e, i, o, u \}$

$\{ 0_D, 1_D, 2_D, \ldots, 9_D, 0_N, 1_N, 2_N, 3_N \ldots \}$

- Operandos: $\{ 0, 1, 2, \ldots, 9 \}$ e $\mathbf{N}$

$\varnothing$

- Operandos: $\varnothing$ e $\varnothing$

$\{ \langle a, 0 \rangle, \langle b, 0 \rangle \}$

- Operandos: $\{ a, b \}$ e $\varnothing$

$\{ \langle a, 0 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle \}$

- Operandos: $\{ a, b \}$ e $\{ a, b, c \}$

3 – Álgebra de Conjuntos

3.6 Relação entre Lógica e Álgebra de Conjuntos

Propriedade	Lógica	Teoria dos Conjuntos
Idemp	$p \land p \Leftrightarrow p$ $p \lor p \Leftrightarrow p$	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$
Comut	$p \land q \Leftrightarrow q \land p$ $p \lor q \Leftrightarrow q \lor p$	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
Associat	$p \land (q \land r) \Leftrightarrow (p \land q) \land r$ $p \lor (q \lor r) \Leftrightarrow (p \lor q) \lor r$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Propriedade	Lógica	Teoria dos Conjuntos
Distrib	$p \land (q \lor r) \Leftrightarrow$ $(p \land q) \lor (p \land r)$ $p \lor (q \land r) \Leftrightarrow$ $(p \lor q) \land (p \lor r)$	$A \cap (B \cup C) =$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) =$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
Negação/ Compl	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$ $p \land \neg p \Leftrightarrow F$ $p \lor \neg p \Leftrightarrow V$	$\sim\sim A = A$ $A \cap \sim A = \varnothing$ $A \cup \sim A = \mathbf{U}$
DeMorgan	$\neg(p \land q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$ $\neg(p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$	$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$ $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

Propriedade	Lógica	Teoria dos Conjuntos
Elemento Neutro	$p \wedge V \Leftrightarrow p$ $p \vee F \Leftrightarrow p$	$A \cap \mathbf{U} = A$ $A \cup \varnothing = A$
Elemento Absorvente	$p \wedge F \Leftrightarrow F$ $p \vee V \Leftrightarrow V$	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$

♦ Importante exercício proposto no Capítulo 2

- qq dos conetivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$
  - pode ser expresso usando somente $\neg$ e $\wedge$
- importante em diversas aplicações da Computação e Informática
  - exemplo: Técnicas Digitais
- mesmo resultado vale para a Álgebra de Conjuntos
  - usando somente $\sim$ e $\cap$
- exercício:
  - como $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ podem ser expressos na Álgebra de Conjuntos?

♦ Relações Lógicas $\times$ Relações sobre Conjuntos

Relação	Lógica	Teoria dos Conjuntos
Implicação/Continência	$p \Rightarrow p$	$A \subseteq B$
Equivalência/Igualdade	$p \Leftrightarrow q$	$A = B$

♦ Como visto no Capítulo 2

- $p(x)$ é uma proposição p tq descreve alguma propriedade de $x \in \mathbf{U}$

♦ Lógica × Teoria dos Conjuntos

- $A = \{ x \mid p(x) \}$ e $B = \{ x \mid q(x) \}$
  - $A \subseteq B$ se e somente se $(\forall x \in \mathbf{U})\ (p(x) \Rightarrow q(x))$ *continência*
  - $A = B$ se e somente se $(\forall x \in \mathbf{U})\ (p(x) \Leftrightarrow q(x))$ *igualdade*

- exemplo
  - $A = \mathbf{U}$ se e somente se $(\forall x \in \mathbf{U})\ (p(x) \Leftrightarrow V)$ *universo*
  - $A = \varnothing$ se e somente se $(\forall x \in \mathbf{U})\ (p(x) \Leftrightarrow F)$ *vazio*

- Justifica o fato de que qq continência ou igualdade
  - decorrência de alguma implicação ou igualdade

♦ Correlação entre Lógica e Álgebra de Conjuntos

- *não* é casual
- ambas são um caso particular de uma álgebra abstrata
  - ⁎ denominada Álgebra de Boole
  - ⁎ vista adiante

3 – Álgebra de Conjuntos

3.7 Álgebra de Conjuntos nas Linguagens de Programação

- **Já discutido: *nem* toda linguagem de programação**
  - possui boas facilidades para tratar conjuntos
- **Pascal (lembrando)**
  - tipos de dados baseados em conjuntos finitos
  - variáveis conjuntos sobre estes tipos de dados
  - constantes conjuntos (também finitos)
- **Pascal: operações não-reversíveis sobre conjuntos:**
  - união: **+**
  - intersecção: *****
  - diferença: **–**

Exp: Trechos de Programas em Pascal

Suponha o tipo de dados

```
dias_semana = set of (seg, ter, qua, qui,
   sex, sab, dom)
```

variáveis

```
feriado, trabalho, feriado_trabalho,
   úteis, parados: dias_semana
```

trechos de programas

```
feriado := [qua, sab]
```

```
trabalho := [seg,..., sex]
```

Os trechos de programas em Pascal

```
feriado_trabalho := trabalho * feriado
úteis := trabalho – feriado
parado := [sab, dom] + feriado
```

correspondem, na Teoria dos Conjuntos

- feriado_trabalho = trabalho $\cap$ feriado { qua }
- úteis = trabalho – feriado { seg, ter, qui, sex }
- parado = { sab, dom } $\cup$ feriado { qua, sab, dom }

Exp: Programa Completo em Pascal

Programa capaz de ler uma linha de texto e determinar o número de

- vogais
- consoantes
- outros símbolos
- total de caracteres lidos

```
program numero_caracteres(input, output);
type
   alfabeto = set of ‘a’..’z’;
var
   n_vogais, n_consoantes, n_outros,
      total: integer;
   vogais, consoantes: alfabeto;
   caractere: char;
begin
   vogais := [‘a’, ‘e’, ‘i’, ‘o’, ‘u’];
   consoantes := [‘a’..‘z’] – vogais;
   n_vogais := 0;
   n_consoantes := 0;
   n_outros := 0;
   read(caractere);
```

```
while not eoln
do begin
   if caractere in vogais
   then n_vogais := n_vogais + 1
   else if caractere in consoantes
        then n_consoantes := n_consoantes + 1
        else n_outros := n_outros + 1;
   read(caractere)
   end;
total := n_vogais + n_consoantes + n_outros;
writeln('vogais = ', n_vogais);
writeln('consoantes: ', n_consoantes);
writeln('outros símbolos: ', n_outros);
writeln('total de símbolos: ', total)
end.
```

♦ Construções similares a do produto cartesiano

- reversíveis
  - ∗ arranjos (*arrays*)
  - ∗ registros (*records*)
- abordagem mais adequada
  - ∗ quando do estudo do conceito de função

3 – Álgebra de Conjuntos

3.8 Álgebra de Conjuntos e Teoria da Computação

♦ Álgebra de Conjuntos

- fundamental no estudo da Teoria da Computação

♦ Teoria da Computação

- meios para *correta* aplicação e entendimento dos conceitos de
  - algoritmo
  - computabilidade
  - conseqüentemente, do que é solucionável em um computador
- conceitos *mínimos* que qq estudante necessita saber

- **Lembre-se: linguagem (formal) L sobre alfabeto Σ**

$$L \subseteq \Sigma^*$$

- **Complemento da linguagem L**

$$\sim L = \{ x \in \Sigma^* \mid x \notin L \}$$

Exp: Complemento de Linguagens

Linguagens sobre $\Sigma = \{ a, b \}$

- $L_1 = \{ \varepsilon \}$
- $L_2 = \{ a \}^* = \{ \varepsilon, a, aa, aaa,\dots \}$
- $\text{Palíndromos} = \{ \varepsilon, a, b, aa, bb, aaa, aba, bab, bbb, aaaa,\dots \}$

Complementos das linguagens

- $\sim L_1 = \{ a, b, aa, ab, ba, bb, aaa,\dots \}$
- $\sim L_2 = \{ b, ab, ba, bb, aab, aba, baa, abb, bab, bba, bbb,\dots \}$
- $\sim\text{Palíndromos} = \{ x \in \Sigma^* \mid x \notin \text{Palíndromos} \}$

Obs: Reconhecimento de Linguagens × Complemento

Lembre-se: compilador é um *software*

- traduz um programa escrito na linguagem de programação
- para um código executável no sistema computador.
- estruturado em análise e síntese
  - ∗ análise é responsável pelo reconhecimento da linguagem
  - ∗ verifica se um programa p *válido* para a linguagem L

$$p \in L$$

- se $p \in L$, passa para a síntese
- se $p \notin L$, alertar o programador (correção do programa!)
- portanto, a análise de um compilador verifica se

$$p \in L \quad \text{ou} \quad p \in \sim L$$

Obs: Hierarquia de Linguagens e Problema da Parada

Importante assunto da Teoria da Computação

- limites do que é *possível* computar em um computador

Capítulo 2 – Lógica e Técnicas de Demonstração

- Máquina de Turing: formalização do conceito de algoritmo

Limite do que é possível reconhecer

- *existe* uma Máquina de Turing que reconhece

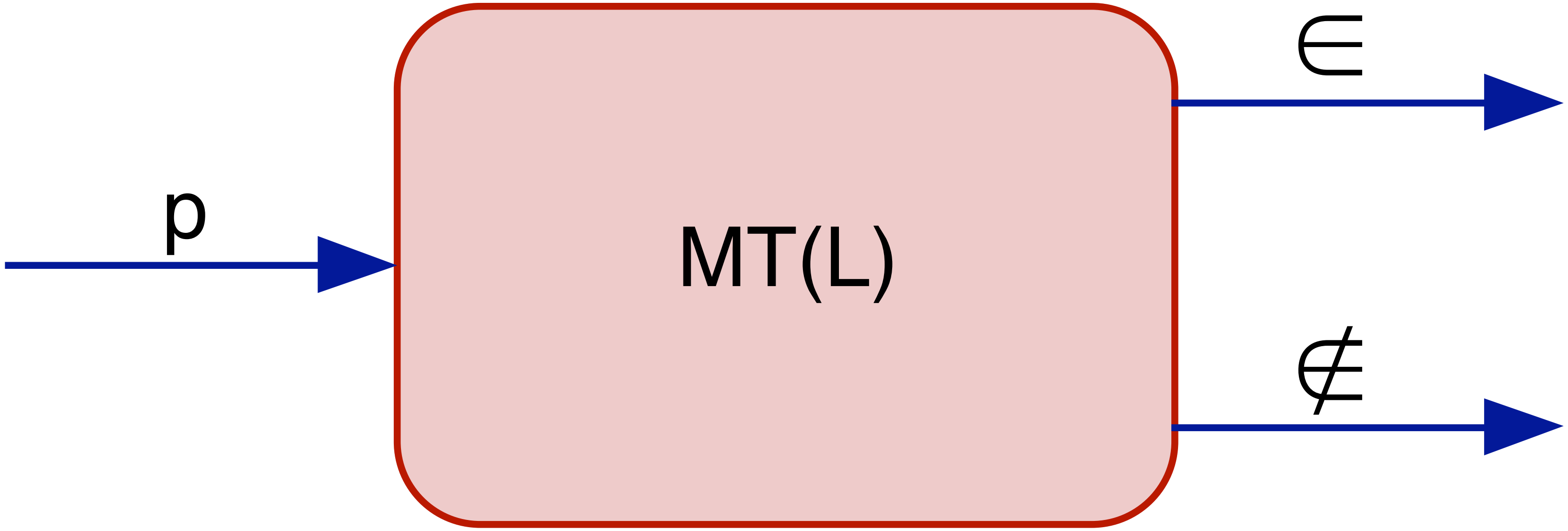
Nesse contexto: linguagens são agrupadas em classes

- hierarquia (continência própria)

♦ Linguagens Recursivas

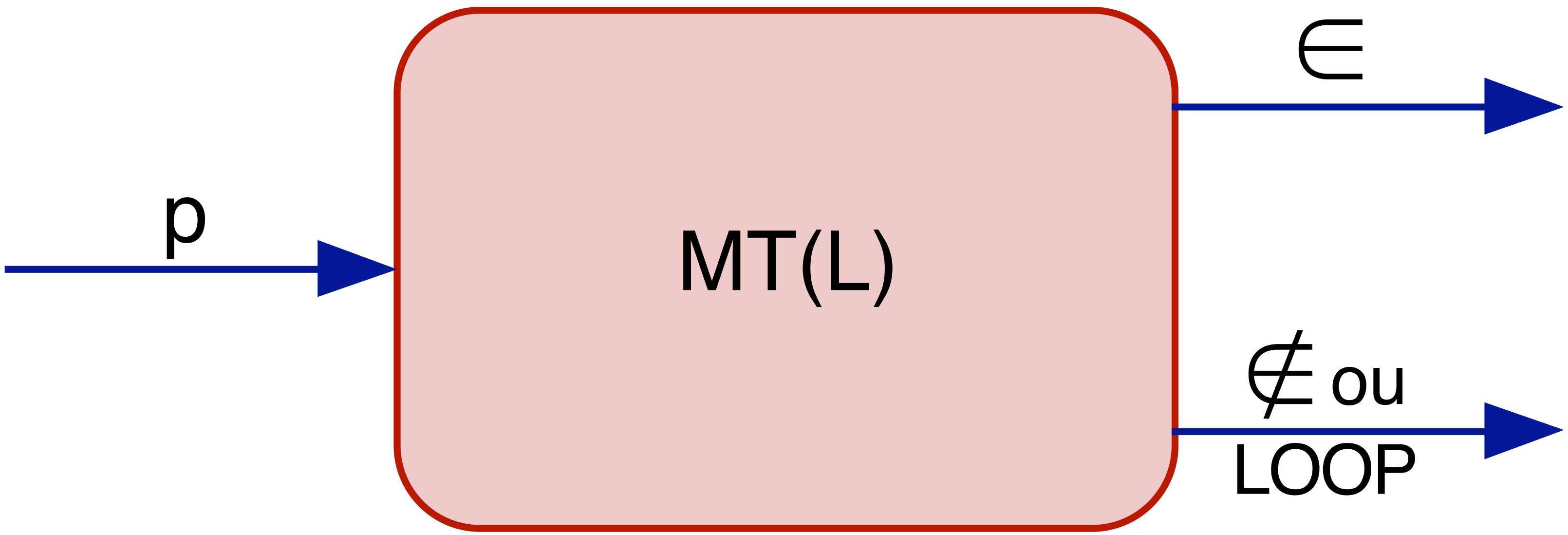
- *existe* um algoritmo (Máquina de Turing) que *sempre pára*
- capaz de determinar se

$$p \in L \text{ ou } p \in \sim L$$



♦ Linguagens Enumeráveis Recursivamente

- *existe* um algoritmo (Máquina de Turing)
- capaz de determinar se $p \in L$
- *entretanto*, se $p \in \sim L$, o algoritmo pode
  - parar identificando que $p \in \sim L$
  - ficar em *loop* infinito



♦ Contradiz a intuição pois estabelece que

reconhecer o complemento de uma linguagem pode ser impossível, mesmo que seja possível reconhecer a linguagem

♦ Linguagens Não-Computáveis

- *não* existe algoritmo (Máquina de Turing) capaz de determinar se

$$p \in L \text{ ou } p \in \sim L$$

♦ Problema da Parada

- se qq Máquina de Turing pára determinando se $p \in L$ ou $p \in \sim L$
  - ∗ *não tem solução* computacional

- baseado nesse resultado prova-se
  - ∗ inúmeros problemas *não* possuem solução computacional
  - ∗ inclui muitos problemas interessantes e importantes para CC

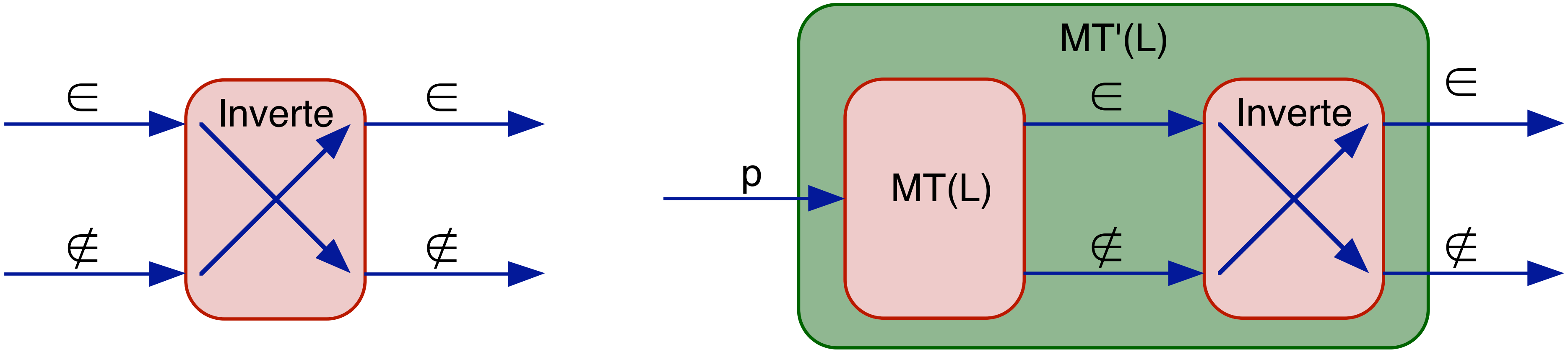
Teorema: Complemento de Ling. Recursiva é Recursiva

Se L sobre ∑ é recursiva, então ~L também é recursiva

Prova: (*direta*)

Suponha L linguagem recursiva sobre ∑

Então existe Máquina de Turing MT(L) que aceita L e sempre pára



Portanto, o complemento de uma linguagem recursiva é recursiva

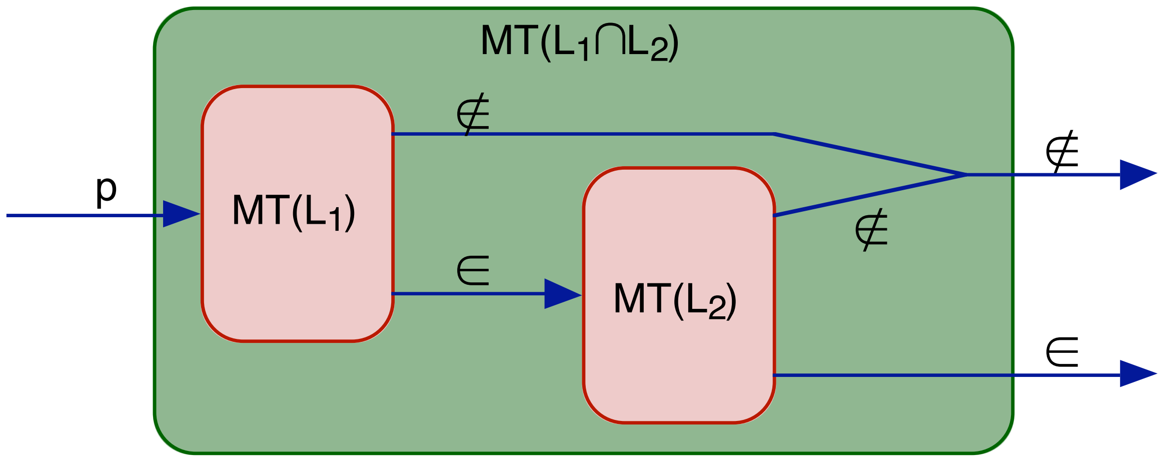
Teorema: Intersecção de Ling. Recursivas é Recursiva

Se L_1 e L_2 sobre Σ são recursivas, então $L_1 \cap L_2$ também é recursiva

Prova: (*direta*)

Suponha L_1 e L_2 linguagens recursivas sobre Σ

Então existem Máquinas de Turing $MT(L_1)$ e $MT(L_2)$ tq aceitam L_1 e L_2 e sempre param



Portanto, a intersecção de duas linguagens recursivas é recursiva

♦ Outros resultados (exercícios)

- união de duas linguagens recursivas é recursiva
- complemento de uma linguagem enumerável recursivamente *não* necessariamente é enumerável recursivamente
- uma linguagem é recursiva sss a linguagem e seu complemento são enumeráveis recursivamente

Matemática Discreta para Ciência da Computação

P. Blauth Menezes

Matemática Discreta para Ciência da Computação

P. Blauth Menezes

blauth@inf.ufrgs.br

Departamento de Informática Teórica

Instituto de Informática / UFRGS