Matemática Discreta para Ciência da Computação

P. Blauth Menezes

blauth@inf.ufrgs.br

Departamento de Informática Teórica

Instituto de Informática / UFRGS

Matemática Discreta para Ciência da Computação

P. Blauth Menezes

4 – Relações

4 – Relações

◆ Conceito intuitivo de relação

- muito próximo do conceito formal

◆ Exemplos do cotidiano

- *parentesco*
- *maior ou igual* (como estatura de pessoas)
- *igualdade* (como de numeros reais)
- *lista telefônica* que associa a cada assinante o seu número (ou números) de telefone
- *faz fronteira com* para um conjunto de países
- *filas de pessoas* para os diversos caixas em um banco

◆ Computação e Informática

* muitas construções são baseadas em relações ou derivados (funções…)
  * algumas são introduzidas na disciplina
* existem importantes construções que são relações
  * Banco de Dados Relacional
  * Rede de Petri

4.1 Introdução

◆ Conceito intuitivo de relação

- é usual na Matemática e na Computação e Informática

◆ Exemplos de relações já usados

- Teoria dos Conjuntos
  - ∗ igualdade
  - ∗ continência

- Lógica
  - ∗ equivalência
  - ∗ implicação

- **São relações binárias**
  - relacionam dois elementos de cada vez
- **Seguindo o mesmo raciocínio**
  - relações ternárias, quaternárias, unárias, etc.
- **Relações podem ser sobre coleções que não são conjuntos**
  - exemplo: a continência sobre todos os conjuntos
- **O estudo que segue**
  - relações *binárias* e *pequenas*

Def: Relação

Relação (pequena e binária) R de A em B

$$R \subseteq A \times B$$

- A: domínio, origem ou conjunto de partida de R
- B: contra-domínio, codomínio, destino ou conjunto de chegada de R

◆ **Se $\langle a, b \rangle \in R$**

a relaciona-se com b

Exp: Relação

$A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$ e $C = \{ 0, 1, 2 \}$

- $\varnothing$ é relação de A em B
  - ∗ de A em C, de B em C, etc.
- $A \times B = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle \}$ é relação com origem em A e destino B
- conjunto de partida A e conjunto de chegada B
  - ∗ $\{ \langle a, a \rangle \}$ é relação de igualdade
- $\{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \}$
  - ∗ relação de “menor” de C em C
- $\{ \langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle \}$ é uma relação de C em B

- **Notação alternativa para relação $R \subseteq A \times B$**

$$R: A \to B$$

- **Notação para $\langle a, b \rangle \in R$**

$$a\, R\, b$$

Exp: Relação

$A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$ e $C = \{ 0, 1, 2 \}$

- Para $\subseteq$: $\mathbf{P}(B) \to \mathbf{P}(B)$, tem-se que $\{ a \} \subseteq \{ a, b \}$
- Para $\leq$: $C \to C$, tem-se que $0 \leq 2$
- Para $=$: $A \to A$, tem-se que $a = a$

- **Relação não necessariamente relaciona entidades de um mesmo conjunto**
  - exemplo: lista telefônica relaciona pessoas com números
  - relacionar entidades de um mesmo conjunto: especialmente importante

Def: Endorrelação, Auto-Relação

A um conjunto. Relação $R: A \to A$ é uma Endorrelação ou Auto-Relação

- nesse caso, R é uma relação em A

- **Notação de uma endorrelação $R: A \to A$**

$$\langle A, R \rangle$$

Exp: Endorrelação

A um conjunto

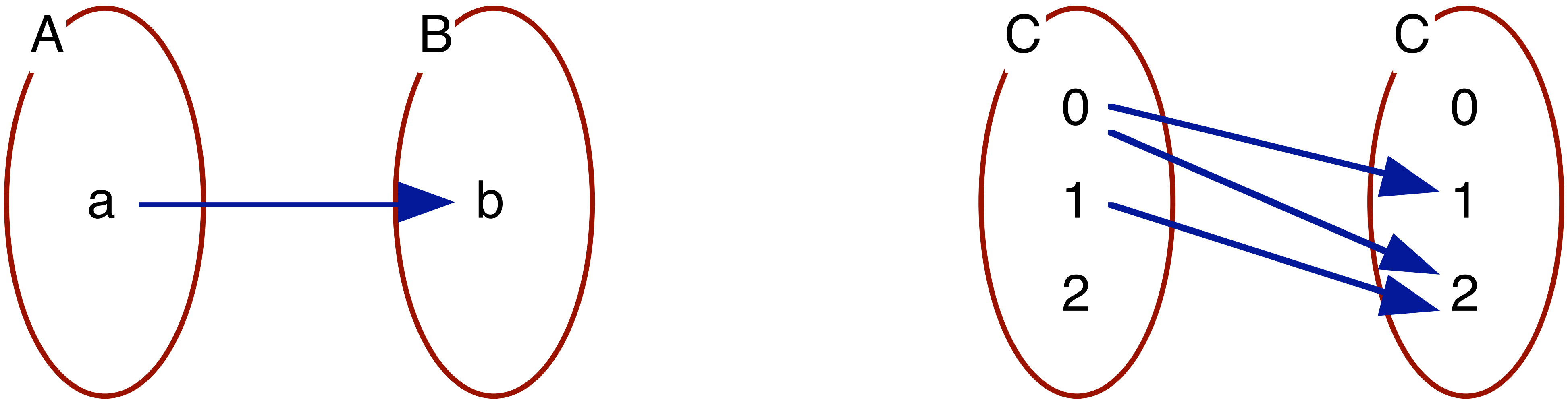
- $\langle \mathbf{N}, \leq \rangle$
- $\langle \mathbf{Z}, < \rangle$
- $\langle \mathbf{Q}, = \rangle$
- $\langle \mathbf{P}(A), \subseteq \rangle$
- $\langle \mathbf{P}(\mathbf{R}), \subset \rangle$

◆ Diagrama de Venn

- elementos relacionados: ligados por setas

Exp: Diagrama de Venn

- par $\langle a, b \rangle$ de $R: A \to B$
- para $C = \{ 0, 1, 2 \}$, a relação $\langle C, < \rangle = \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \}$
  - ∗ C foi repetido no diagrama
  - ∗ usual na diagramação de endorrelações.



Def: Domínio de Definição, Conjunto Imagem, Conexa

$R: A \to B$ uma relação

- $\langle a, b \rangle \in R$
  - R está definida para a
  - b é imagem de a
- Domínio de Definição
  - elementos de A para os quais R está definida
- Conjunto Imagem ou Domínio de Valores
  - todos os elementos de B, os quais são imagem de R

Exp: Domínio de Definição, Conjunto Imagem

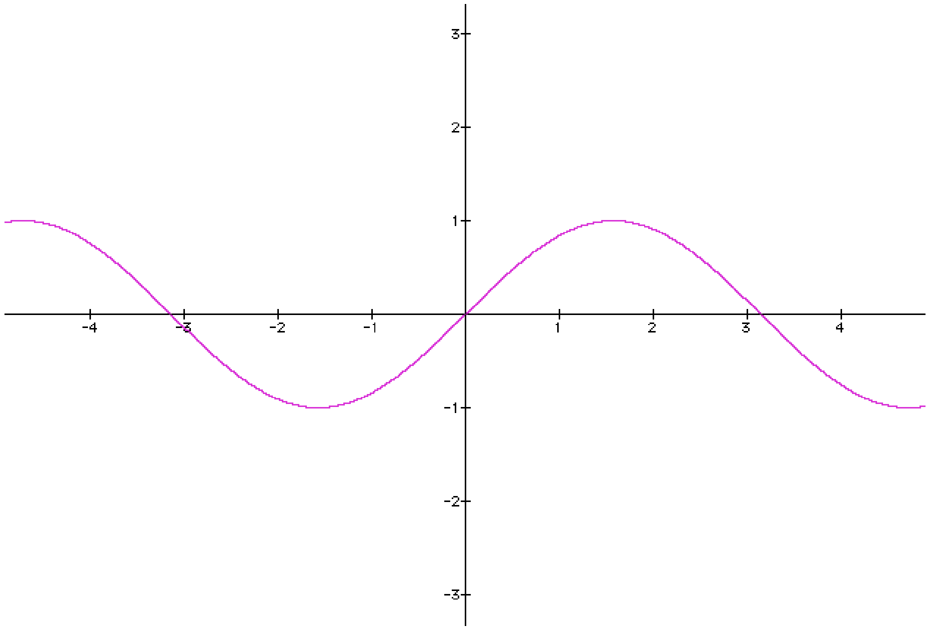
$A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$ e $C = \{ 0, 1, 2 \}$

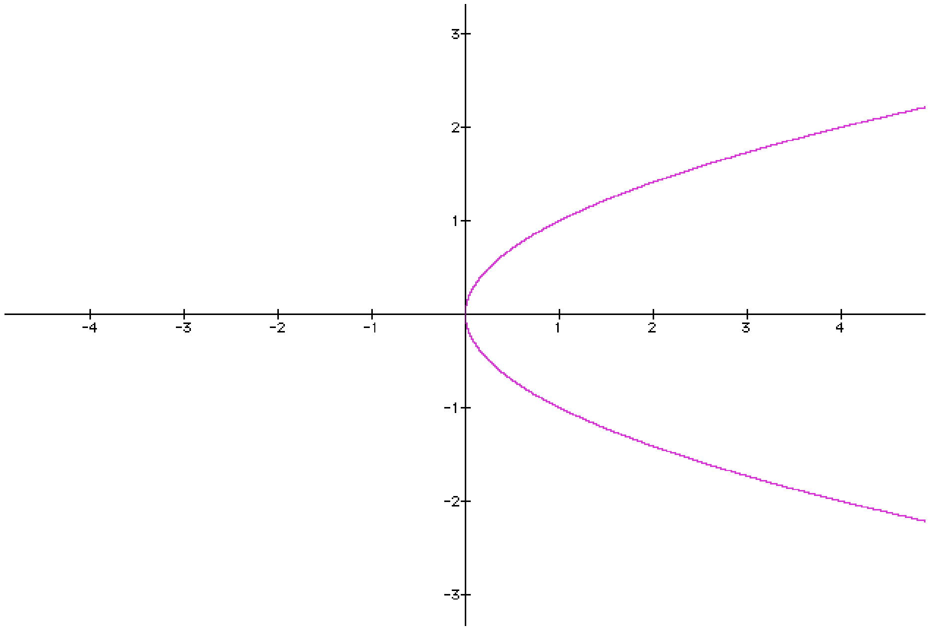
- $\varnothing$: $A \rightarrow B$
  - domínio de definição e conjunto imagem: vazios
- $(C, <)$, sendo que $<$ é definida por $\{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \}$
  - domínio de definição: $\{ 0, 1 \}$
  - domínio de valores: $\{ 1, 2 \}$
- $=$: $A \rightarrow B$
  - domínio de definição e conjunto imagem: $\{ a \}$

◆ Representação gráfica das relações binárias

- importante em diversas aplicações computacionais ou não
  - em especial, das endorrelações em $\mathbf{R}$
  - $R \subseteq \mathbf{R}^2$ representados no plano cartesiano

Exp: Relações no Plano Cartesiano

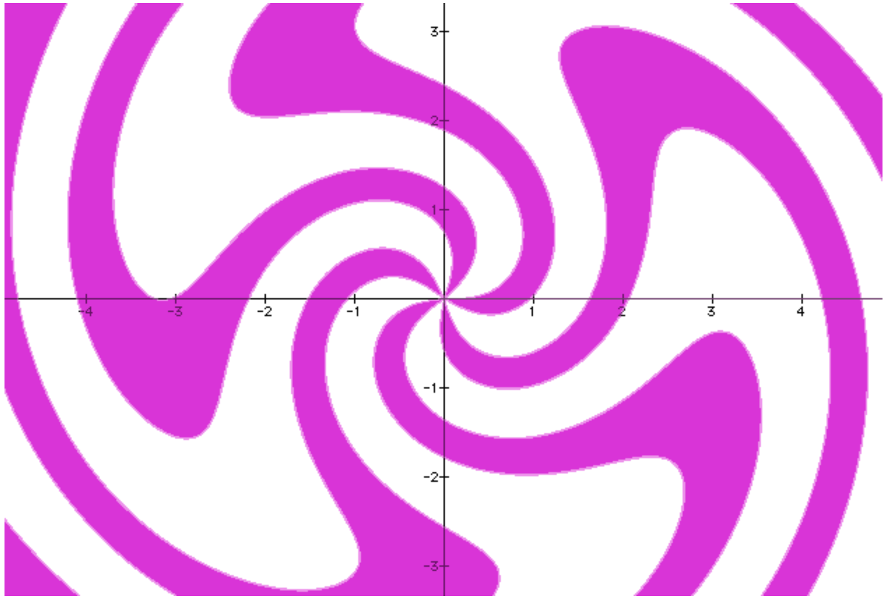


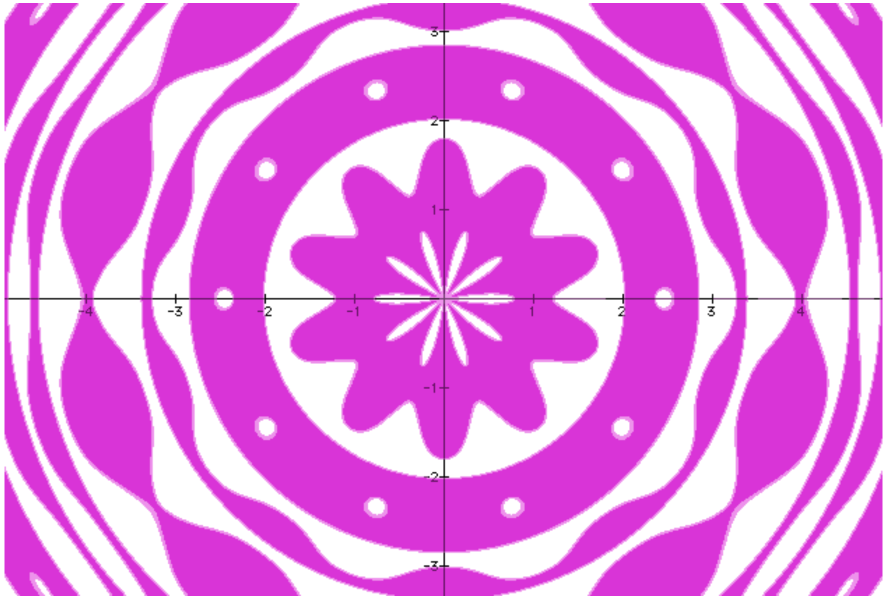


- seno:
  - $R_1 = \{ \langle x, y \rangle \mid y = \text{sen}\, x \}$
- parábola
  - $R_2 = \{ \langle x, y \rangle \mid x = y^2 \}$

- **Coordenadas polares são freqüentemente usadas para representar imagens no plano**

Exp: Relações no Plano Cartesiano





- $\text{sen}(6 \cos r + 5\theta) < -0{,}3$
- $\cos 10\theta < \tan(r \,\text{sen}\, 2r)$

4 – Relações

4.1 Relação
4.2 Endorrelação como Grafo
4.3 Relação como Matriz
4.4 Relação Dual e Composição de Relações
4.5 Tipos de Relações
4.6 Banco de Dados Relacional
4.7 Rede de Petri
4.8 Relações nas Linguagens de Programação

4.2 Endorrelação como Grafo

- **Endorrelação $R: A \to A$ pode ser vista como grafo**
- **Será visto que**
  - toda endorrelação *é* um grafo
  - *nem todo* grafo é uma endorrelação
- **Teoria dos Grafos**
  - conceitos introduzidos em capítulo específico
  - *não* é objetivo desta disciplina
  - introduzido via exemlos

Endorrelação como grafo

- facilita o estudo
- visão mais clara do relacionamento e das propriedades

Limitações da representação física

- conveniente para relações com poucos pares

Se representação física não é importante

- como grafo pode ser conveniente
- mesmo com um número infinito de pares

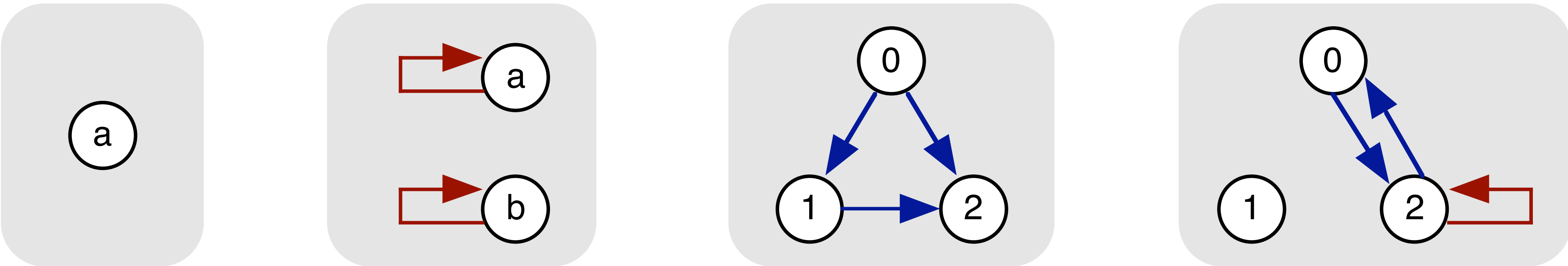
◆ Uma endorrelação $R: A \rightarrow A$ como grafo

- Nodos
  - elementos de A
  - ponto ou círculo
- Setas, arcos, arestas
  - pares da relação

Exp: Endorrelação como Grafo

$A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$ e $C = \{ 0, 1, 2 \}$

- $\varnothing: A \to A$
- $\langle B, = \rangle$ — $=$ é definida por $\{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle \}$
- $\langle C, < \rangle$ — $<$ é definida por $\{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \}$
- $R: C \to C$ — $R = \{ \langle 0, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$



- endorrelação cujo grafo possui dois ou mais arcos distintos com o mesmo nodo origem e destino?

4 – Relações

4.1 Relação
4.2 Endorrelação como Grafo
4.3 Relação como Matriz
4.4 Relação Dual e Composição de Relações
4.5 Tipos de Relações
4.6 Banco de Dados Relacional
4.7 Rede de Petri
4.8 Relações nas Linguagens de Programação

4.3 Relação como Matriz

$A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ e $B = \{ b_1, b_2, \ldots, b_m \}$ conjuntos *finitos*

- representação de $R: A \to B$ como matriz
  - ∗ especialmente interessante para implementação

◆ Representação

- n linhas
- m colunas
- $m * n$ posições ou células
  - ∗ cada posições contém valor lógico (verdadeiro ou falso)
  - ∗ por simplicidade: 0 e 1 representam falso e verdadeiro
- se $\langle a_i, b_j \rangle \in R$
  - ∗ linha i e coluna j contém o valor verdadeiro
  - ∗ caso contrário, falso

Exp: Relação como Matriz

$A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$ e $C = \{ 0, 1, 2 \}$

- $\varnothing: A \rightarrow A$
- $\langle B, = \rangle$ — $=$ é definida por $\{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle \}$
- $\langle C, < \rangle$ — $<$ é definida por $\{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \}$
- $R: C \rightarrow C$ — $R = \{ \langle 0, 2 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$

∅	a
a	0

=	a	b
a	1	0
b	0	1

<	0	1	2
0	0	1	1
1	0	0	1
2	0	0	0

R	0	1	2
0	0	0	1
1	0	0	0
2	1	0	1

Exp: Relação como Matriz

$A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$ e $C = \{ 0, 1, 2 \}$

- $A \times B: A \to B$
- $\{ \langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle \}: C \to B$
- $\subseteq: \mathbf{P}(A) \to \mathbf{P}(B)$

A×B	a	b
a	1	1

S	a	b
0	1	0
1	0	1
2	0	0

$\subseteq$	$\varnothing$	$\{ a \}$	$\{ b \}$	$\{ a, b \}$
$\varnothing$	1	1	1	1
$\{ a \}$	0	1	0	1

4 – Relações

4.4 Relação Dual e Composição de Relações

- **Duas questões naturais no estudos das relações**
  - relação dual
    - inversão (troca) das componentes de cada par de uma relação
    - operação unária sobre as relações
  - relação composta
    - aplicação de uma relação sobre o resultado de outra
    - operação binária sobre as relações

◆ Álgebra de relações

- dualidade e composição
- juntamente com outras operações
  - união
  - intersecção
  - …(exercício)
- constituem uma álgebra de relações
- álgebra grande
  - coleção de todas as relações *não* é um conjunto
  - exercício

4 – Relações

4.4.1 Relação Dual

Def: Relação Dual, Relação Oposta, Relação Inversa

$R: A \to B$ relação. Relação Dual, Oposta ou Inversa de R

$$R^{-1}: B \to A \quad \text{ou} \quad R^{op}: B \to A$$

é tal que

$$R^{-1} = \{ \langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R \}$$

Obs: Relação Dual × Relação Inversa

O termo relação dual será usado preferencialmente ao relação inversa

- relação inversa é mais comum nas bibliografias
- causa confusão com o termo possuir inversa
  - ⁎ fundamental no estudos das relações (será visto adiante)

Exp: Relação × Relação Dual

$A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$ e $C = \{ 0, 1, 2 \}$

$=: A \to B$ dada por $\{ \langle a, a\rangle \}$

$\{ \langle 0, a\rangle, \langle 1, b\rangle \}: C \to B$

$A \times B: A \to B$

$\varnothing: A \to B$

$<: C \to C$

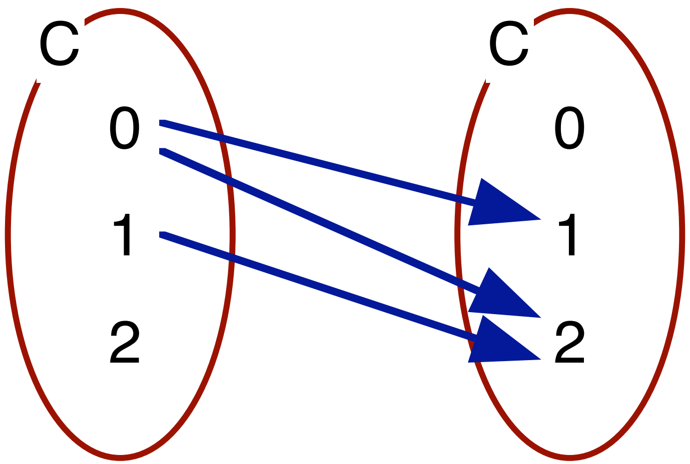
$=^{op}: B \to A$ dada por $\{ \langle a, a\rangle \}$

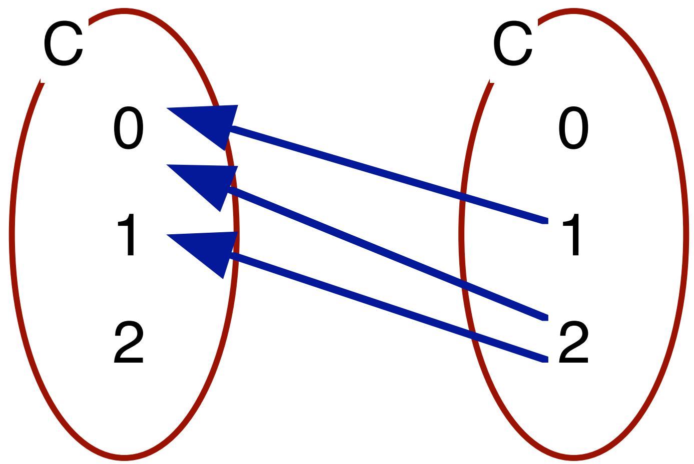
$\{ \langle a, 0\rangle, \langle b, 1\rangle \}: B \to C$

$(A \times B)^{-1} = B \times A: B \to A$

$\varnothing^{op} = \varnothing: B \to A$

$<^{op} = >: C \to C$

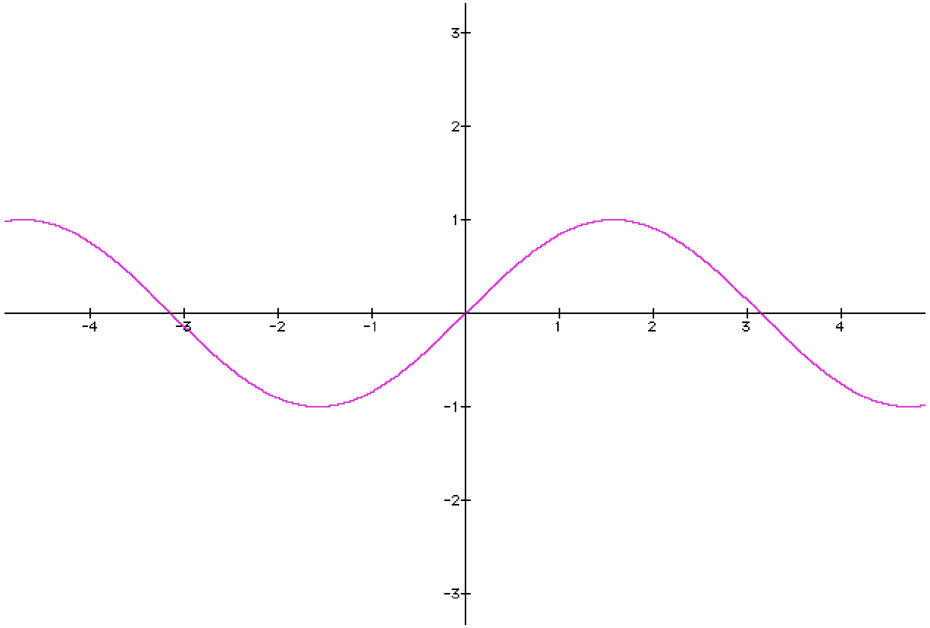


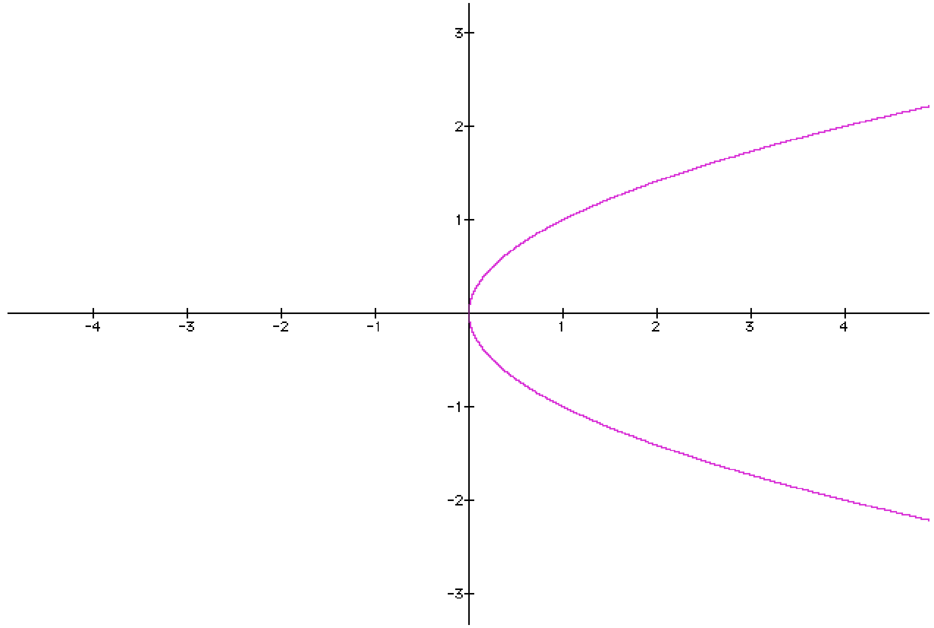


Exp: Relação Dual no Plano Cartesiano

$R_1 = \{ \langle x, y \rangle \mid y = \operatorname{sen} x \}$ $\qquad$ $R_1^{op} = ???$

$R_2 = \{ \langle x, y \rangle \mid x = y^2 \}$ $\qquad$ $R_2^{op} = ???$





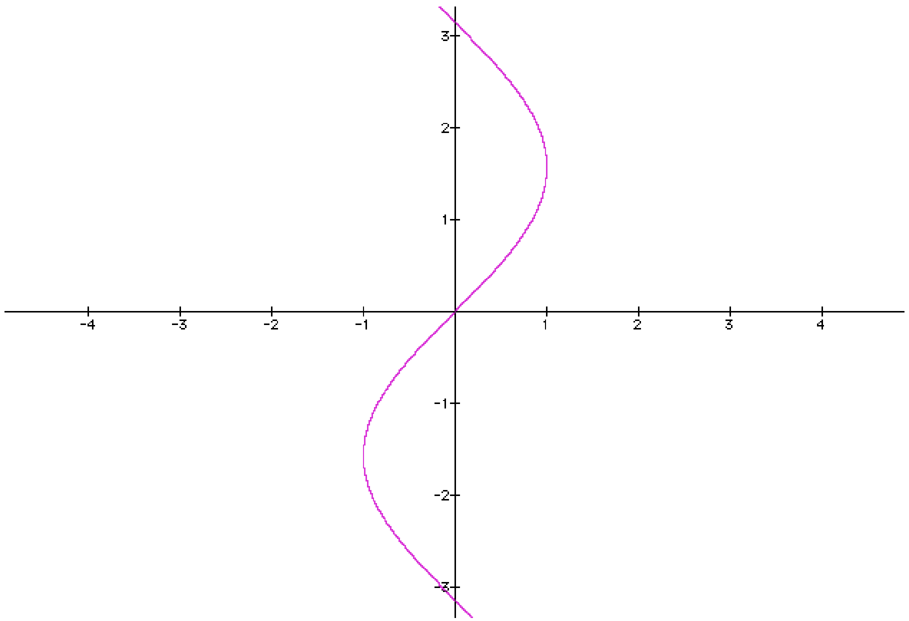
Exp: …Relação Dual no Plano Cartesiano

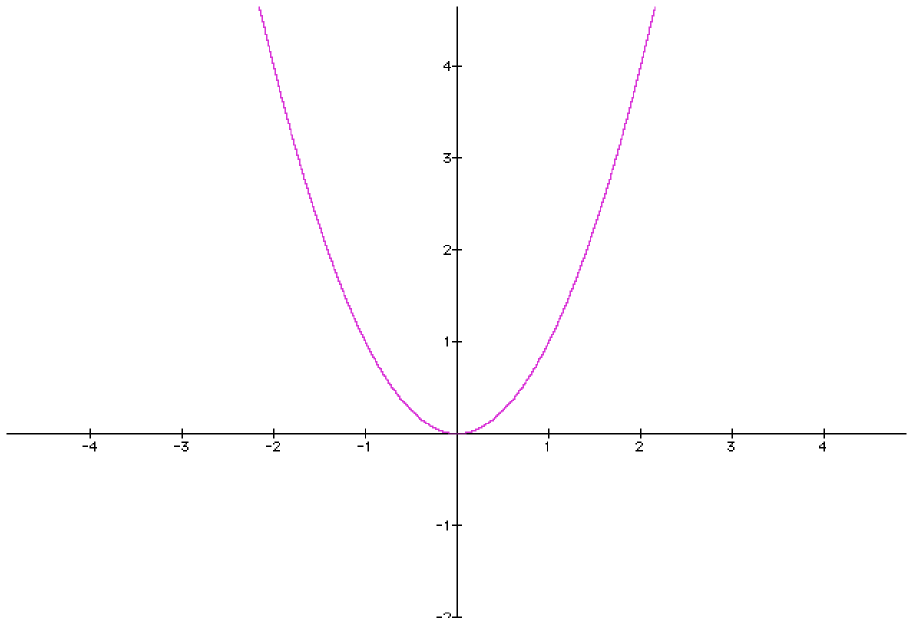
$R_1 = \{ \langle x, y \rangle \mid y = \text{sen}\, x \}$

$R_1{}^{op} = \{ \langle y, x \rangle \mid y = \text{sen}\, x \}$

$R_2 = \{ \langle x, y \rangle \mid x = y^2 \}$

$R_2{}^{op} = \{ \langle y, x \rangle \mid x = y^2 \}$





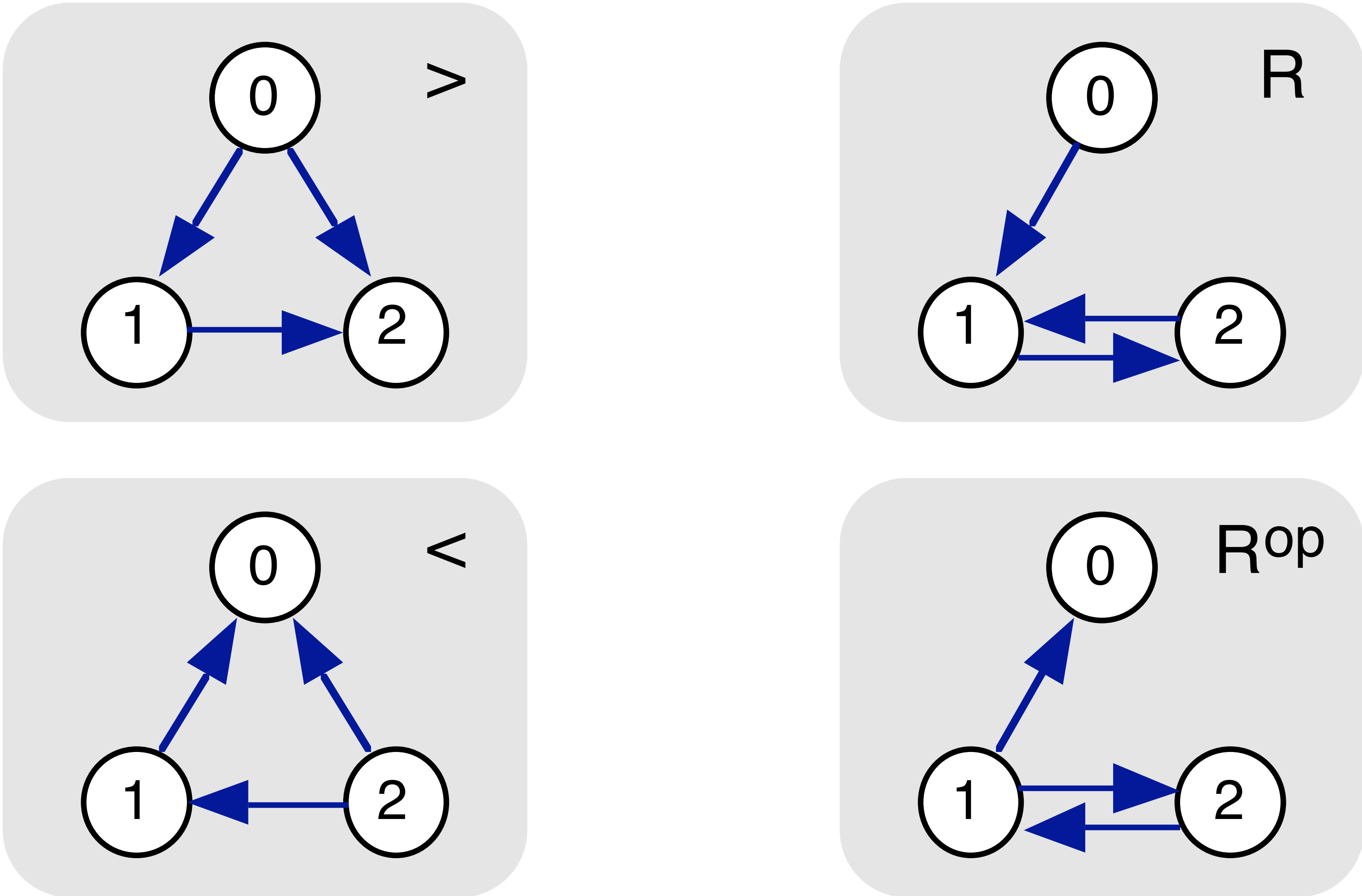
◆ Relação dual como matriz ou grafo (endorrelação)

- matriz da relação dual: matriz transposta
  - troca linhas por colunas

- grafo da relação dual: grafo dual
  - troca do sentido das arestas

Exp: Grafo e Matriz de Relação Dual

$C = \{ 0, 1, 2 \}$, $\langle C, < \rangle$ e $\langle C, R \rangle$



Exp: Matriz de Relação Dual

Sejam $A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$, $C = \{ 0, 1, 2 \}$, $\langle C, < \rangle$ e $\subseteq: \mathbf{P}(A) \to \mathbf{P}(B)$

$<$	0	1	2
0	0	1	1
1	0	0	1
2	0	0	0

$\subseteq$	$\varnothing$	$\{ a \}$	$\{ b \}$	$\{ a,b \}$
$\varnothing$	1	1	1	1
$\{ a \}$	0	1	0	1

$>$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	1	1	0

$\supseteq$	$\varnothing$	$\{ a \}$
$\varnothing$	1	0
$\{ a \}$	1	1
$\{ b \}$	1	0
$\{ a,b \}$	1	1

4 – Relações

4.4.2 Composição de Relações

Def: Composição de Relações

$R: A \to B$ e $S: B \to C$ relações. Composição de R e S

$$S \circ R: A \to C$$

é tal que:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(\forall c \in C)(a\, R\, b \land b\, S\, c \to a\, (S \circ R)\, c)$$

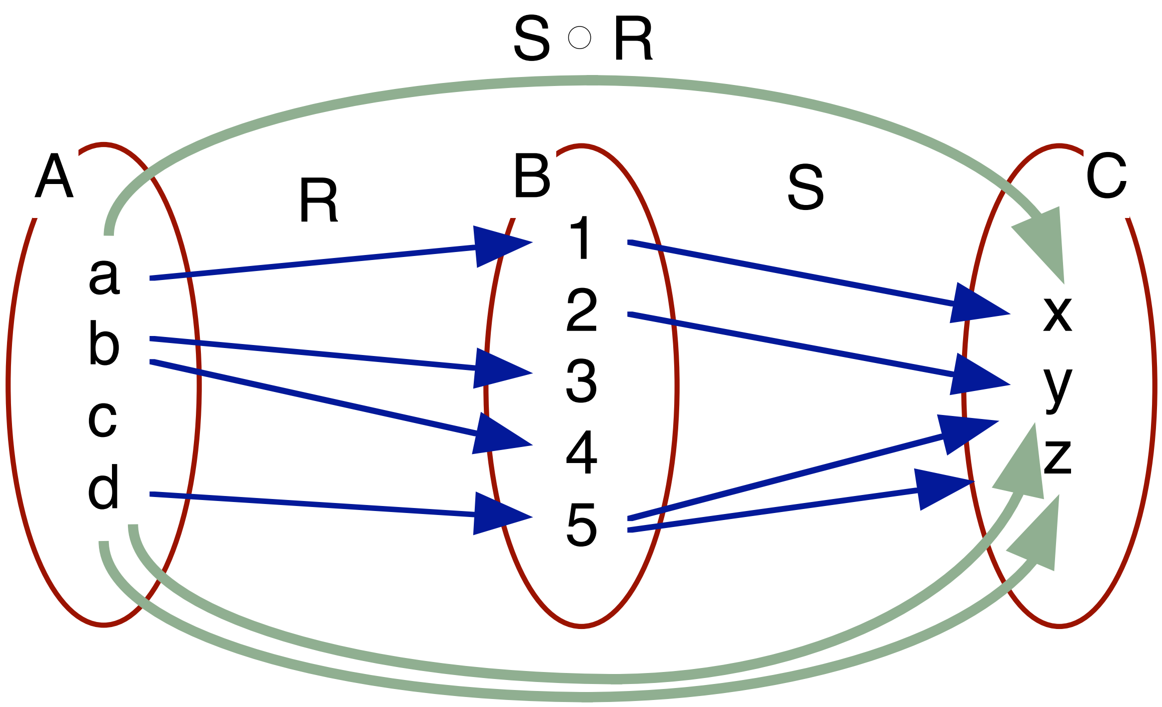
- **Em Computação e Informática**
  - usual representar a composição por ";"
  - ordem inversa

$$R\, ;\, S: A \to C$$

Exp: Composição de Relações

R: $A \rightarrow B$, S: $B \rightarrow C$ e $S \circ R: A \rightarrow C$

- $R = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle b, 4 \rangle, \langle d, 5 \rangle \}$
- $S = \{ \langle 1, x \rangle, \langle 2, y \rangle, \langle 5, y \rangle, \langle 5, z \rangle \}$
- $S \circ R = \{ \langle a, x \rangle, \langle d, y \rangle, \langle d, z \rangle \}$



◆ Relação resultante de uma composição

- pode ser composta com outra relação
- ¿composição de relações é associativa?

Teorema: Associatividade da Composição de Relações

$R: A \to B$, $S: B \to C$ e $T: C \to D$ relações. Então:

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$$

Prova: $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$

Suponha $R: A \to B$, $S: B \to C$ e $T: C \to D$ relações

Prova dividida em dois casos (duas continências)

Caso 1. $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$. Seja $\langle a, d \rangle \in (T \circ S) \circ R$

• $\langle a, d \rangle \in (T \circ S) \circ R \Rightarrow$	definição composição
• $(\exists b \in B)(a\,R\,b \wedge b\,(T \circ S)\,d) \Rightarrow$	definição composição
• $(\exists b \in B)(\exists c \in C)(a\,R\,b \wedge (b\,S\,c \wedge c\,T\,d)) \Rightarrow$	associatividade lógica
• $(\exists b \in B)(\exists c \in C)((a\,R\,b \wedge b\,S\,c) \wedge c\,T\,d) \Rightarrow$	associatividade lógica
• $(\exists c \in C)(a\,(S \circ R)\,c \wedge c\,T\,d) \Rightarrow$	definição composição
• $\langle a, d \rangle \in T \circ (S \circ R)$	

Caso 2. $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$. Análoga: exercício

Logo, a composição de relações é associativa

◆ Como a composição de relações é associativa

- parênteses podem ser omitidos

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R) = T \circ S \circ R$$

◆ Composição de relações como grafos

- *não* é especialmente vantajoso

◆ Composição de relações como matrizes

- produto de matrizes
- valores da matrizes são lógicos (verdadeiro, falso ou 1 e 0)
  - multiplicação substituída pelo conetivo lógico $\wedge$
  - adição substituída pelo conetivo lógico $\vee$

◆ Produto lógico de matrizes

- relação R: matriz $m \times n$
- relação S: matriz $n \times p$
- relação $T = S \circ R$: matriz $m \times p$
- cálculo de cada célula t_{uv} da matriz $m \times p$ resultante

$$t_{uv} = (r_{u1} \wedge s_{1v}) \vee (r_{u2} \wedge s_{2v}) \vee \ldots \vee (r_{um} \wedge s_{mv})$$

Exp: Composição como Produto de Matrizes

R	1	2	3	4	5
a	1	0	0	0	0
b	0	0	1	1	0
c	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1

S	x	y	z
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	1	1

T	x	y	z
a	1	0	0
b	0	0	0
c	0	0	0
d	0	1	1

$$t_{11} = (r_{11} \wedge s_{11}) \vee (r_{12} \wedge s_{21}) \vee (r_{13} \wedge s_{31}) \vee (r_{14} \wedge s_{41}) \vee (r_{15} \wedge s_{51}) =$$

$$(1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) = 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 1$$

$$t_{23} = (r_{21} \wedge s_{13}) \vee (r_{22} \wedge s_{23}) \vee (r_{23} \wedge s_{33}) \vee (r_{24} \wedge s_{43}) \vee (r_{25} \wedge s_{53}) =$$

$$(0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0$$

4 – Relações

4.1 Relação
4.2 Endorrelação como Grafo
4.3 Relação como Matriz
4.4 Relação Dual e Composição de Relações
4.5 Tipos de Relações
 4.5.1 Funcional e Injetora
 4.5.2 Total e Sobrejetora
 4.5.3 Monomorfismo e Epimorfismo
 4.5.4 Isomorfismo
4.6 Banco de Dados Relacional
4.7 Rede de Petri
4.8 Relações nas Linguagens de Programação

4.5 Tipos de Relações

- **Tipos de uma relação (não mutuamente exclusivos)**
  - funcional
  - injetora
  - total
  - sobrejetora
  - monomorfismo
  - epimorfismo
  - isomorfismo

◆ Tipos possuem uma noção de dualidade

- se corretamente entendida e aplicada
- simplifica ("divide pela metade") o estudo e o entedimento

◆ Noção de dualidade

- plenamente explorada no estudo de Teoria das Categorias

Teoria das Categorias divide o trabalho pela metade

- nesta disciplina algumas noções categoriais são introduzidas

A dualidade dos tipos

- funcional é o dual de injetora e vice-versa
- total é o dual de sobrejetora e vice-versa

Monomorfismo é dual de epimorfismo

- monomorfismo: total e injetora
- epimorfismo: sobrejetora e funcional

Isomomorfismo

- estabelece uma noção semântica de igualdade
- portanto, é o dual de si mesmo

4 – Relações

4.5.1 Funcional e Injetora

- **Relação funcional é especialmente importante**
  - permite definir função, desenvolvido em capítulo específico

Def: Relação Funcional

Seja $R: A \to B$ relação. Então R é uma Relação Funcional sse

$$(\forall a \in A)(\forall b_1 \in B)(\forall b_2 \in B)(a\,R\,b_1 \land a\,R\,b_2 \to b_1 = b_2)$$

- **Qual o significado?**

◆ Portanto, para $R: A \to B$ funcional

- cada elemento de A
- está relacionado com, no máximo, um elemento de B

Exp: Relação Funcional

$A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$ e $C = \{ 0, 1, 2 \}$

- $\varnothing: A \to B$ ✔
- $\{ \langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle \}: C \to B$ ✔
- $=: A \to B$ ✔
- $x^2: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ onde $x^2 = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbf{Z}^2 \mid y = x^2 \}$ ✔

- $A \times B: A \to B$ ✘
- $<: C \to C$ ✘

◆ Grafo e matriz de uma relação funcional?

◆ Rel. funcional como matriz ou grafo (endorrelação)

- matriz: no maximo um valor verdadeiro em cada *linha*
- grafo: no máximo uma aresta *partindo* de cada nodo

◆ Injetora é o conceito dual

- matriz: no maximo um valor verdadeiro em cada *coluna*
- grafo: no máximo uma aresta *chegando* em cada nodo

Def: Relação Injetora

Seja $R: A \to B$ relação. Então R é Relação Injetora sse

$$(\forall b \in B)(\forall a_1 \in A)(\forall a_2 \in A)(a_1 \, R \, b \land a_2 \, R \, b \to a_1 = a_2)$$

◆ Qual o significado?

◆ Portanto, para R: $A \rightarrow B$ injetora

- cada elemento de B
- está relacionado com, no máximo, um elemento de A

Exp: Relação Injetora

$A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$ e $C = \{ 0, 1, 2 \}$

- $\emptyset: A \rightarrow B$ ✔
- $=: A \rightarrow B$ ✔
- $\{ \langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle \}: C \rightarrow B$ ✔

- $A \times B: A \rightarrow B$ ✘
- $<: C \rightarrow C$ ✘
- $x^2: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ onde $x^2 = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbf{Z}^2 \mid y = x^2 \}$ ✘

◆ Dual $\neq$ Complementar

- funcional e injetora
  - conceitos duais
  - *não* são complementares

- fácil encontrar exempos de relações
  - são simultaneamente funcional e injetora
  - *não* são simultaneamente funcional e injetora

4 – Relações

4.5.2 Total e Sobrejetora

Def: Relação Total

Seja $R: A \to B$ relação. Então R é uma Relação Total sse

$$(\forall a \in A)(\exists b \in B)(a R b)$$

- **Qual o significado?**

- **Portanto, para $R: A \to B$ total**
  - domínio de definição é A

Exp: Relação Total

$A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$ e $C = \{ 0, 1, 2 \}$

- $=: A \to B$ ✔
- $A \times B: A \to B$ ✔
- $x^2: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ onde $x^2 = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbf{Z}^2 \mid y = x^2 \}$ ✔

- $\varnothing: A \to B$ ✘
- $\{ \langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle \}: C \to B$ ✘
- $<: C \to C$ ✘

- **Grafo e matriz de uma relação total?**

◆ Relação total como matriz ou grafo (endorrelação)

- matriz: pelo menos um valor verdadeiro em cada *linha*
- grafo: pelo menos uma aresta *partindo* de cada nodo

◆ Sobrejetora é o conceito dual

- matriz: pelo menos um valor verdadeiro em cada *coluna*
- grafo: pelo menos uma aresta *chegando* em cada nodo

Def: Relação Sobrejetora

Seja $R: A \to B$ relação. Então R é uma Relação Sobrejetora sse

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(a \, R \, b)$$

◆ Qual o significado?

◆ Portanto, para $R: A \to B$ sobrejetora

- conjunto imagem é B

Exp: Relação Sobrejetora

$A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$ e $C = \{ 0, 1, 2 \}$

- $=: A \to A$ ✔
- $\{ \langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle \}: C \to B$ ✔
- $A \times B: A \to B$ ✔

- $=: A \to B$ ✘
- $\varnothing: A \to B$ ✘
- $<: C \to C$ ✘
- $x^2: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ onde $x^2 = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbf{Z}^2 \mid y = x^2 \}$ ✘

◆ Dual $\neq$ Complementar

- total e sobrejetora
  - conceitos duais
  - *não* são complementares

- fácil encontrar exempos de relações
  - são simultaneamente total e sobrejetora
  - *não* são simultaneamente total e sobrejetora

4 – Relações

4.5.3 Monomorfismo e Epimorfismo

◆ Monomorfismo, epimorfismo e isomomorfismo

- noções gerais
- podem ser aplicadas a outras construções além das relações
  - ∗ estudado em Teoria das Categorias
- nosso estudo: restrito às relações

Def: Monomorfismo, Monorrelação

Seja $R: A \to B$ relação. Então R é Monomorfismo ou Monorrelação sse

- total
- injetora

◆ Portanto, para $R: A \to B$ monorrelação

- domínio de definição é A
- cada elem. de B está relacionado com, no máximo, um elem. de A

Exp: Monorrelação

$A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$ e $C = \{ 0, 1, 2 \}$

- $=: A \to B$ ✔
- $A \times B: A \to B$ ✔
- $B \times C: B \to C$ ✘
- $\varnothing: A \to B$ ✘
- $\{ \langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle \}: C \to B$ ✘
- $<: C \to C$ ✘
- $x^2: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ onde $x^2 = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbf{Z}^2 \mid y = x^2 \}$ ✘

◆ Monorrelação como matriz ou grafo (endorrelação)

- matriz
  - ⁎ pelo menos um valor verdadeiro em cada *linha* (total)
  - ⁎ no máximo um valor verdadeiro em cada *coluna* (injetora)
- grafo (endorrelação)
  - ⁎ pelo menos uma aresta *partindo* (total) em cada nodo
  - ⁎ no máximo uma aresta *chegando* (injetora) em cada nodo

◆ Epirrelação é o conceito dual

- matriz
  - ⁎ pelo menos um valor verdadeiro em cada *coluna* (sobrejetora)
  - ⁎ no máximo um valor verdadeiro em cada *linha* (funcional)
- grafo
  - ⁎ pelo menos uma aresta *chegando* (sobrejetora) em cada nodo
  - ⁎ no máximo uma aresta *partindo* (funcional) em cada nodo

Def: Epimorfismo, Epirrelação

Seja $R: A \rightarrow B$ relação. Então R é Epimorfismo ou Epirrelação sse

- funcional
- sobrejetora

◆ Portanto, para $R: A \to B$ epirrelação

- conjunto imagem é B
- cada elem. de A está relacionado com, no máximo, um elem. de B

Exp: Epirrelação

$A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$ e $C = \{ 0, 1, 2 \}$

- $=: A \to A$ ✔
- $\{ \langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle \}: C \to B$ ✔

- $=: A \to B$ ✘
- $\varnothing: A \to B$ ✘
- $A \times B: A \to B$ ✘
- $<: C \to C$ ✘
- $x^2: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ onde $x^2 = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbf{Z}^2 \mid y = x^2 \}$ ✘

4 – Relações

4.1 Relação
4.2 Endorrelação como Grafo
4.3 Relação como Matriz
4.4 Relação Dual e Composição de Relações
4.5 Tipos de Relações
 4.5.1 Funcional e Injetora
 4.5.2 Total e Sobrejetora
 4.5.3 Monomorfismo e Epimorfismo
 4.5.4 Isomorfismo
4.6 Banco de Dados Relacional
4.7 Rede de Petri
4.8 Relações nas Linguagens de Programação

4.5.4 Isomorfismo

- **Isomorfismo: uma noção de igualdade semântica**
  - uma relação tal que
  - quando composta com a sua inversa
  - resulta em uma igualdade
- **Intuitivamente**

“ir” (via relação) e “voltar” (via sua inversa) “sem alterar”

◆ Antes de definir isomorfismo: relação identidade

- relações de igualdade são freqüentes
  - $=: \{ a \} \to \{ a, b \}$ definida por $\{ \langle a, a \rangle \}$
  - $\langle \{ a, b \}, = \rangle$ definida por $\{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle \}$

- relação identidade: endorrelação $\langle A, = \rangle$
  - denotada por $\langle A, id_A \rangle$

$$id_A: A \to A$$

Def: Isomorfismo, Isorrelação

Relação $R: A \to B$ é Isomorfismo ou Isorrelação, sse existe $S: B \to A$

- $S \circ R = id_A$
- $R \circ S = id_B$

Notação para enfatizar que $R: A \to B$ é uma isorrelação

$$R: A \leftrightarrow B$$

R possui inversa à esquerda: $S \circ R = id_A$

R possui inversa à direita: $R \circ S = id_B$

R possui inversa: $S \circ R = id_A$ e $R \circ S = id_B$

Conjuntos isomorfos

- se existe uma isorrelação entre dois conjuntos

Exp: Isorrelação, Conjuntos Isomorfos

Sejam $A = \{ a, b, c \}$, $C = \{ 1, 2, 3 \}$ e $R: A \to C$

- $R = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 3 \rangle \}$

R *é* um isomorfismo. Considere a dual $R^{-1}: C \to A$ tal que

- $R^{-1} = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, c \rangle \}$

Logo:

- $R^{-1} \mathbf{o}\, R = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle \} = id_A$
- $R\, \mathbf{o}\, R^{-1} = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \} = id_B$

Portanto, A e C são conjuntos isomorfos

◆ Prova de que **é** um isomorfismo

- mostrar que possui inversa
  - *se* possui inversa, então é a relação dual

◆ Prova de que ***não*** é um isomorfismo

- pode ser um pouco mais difícil
- freqüêntemente, por *absurdo*
- a dual *nem* sempre é a inversa

Exp: Não é Isomorfismo

Sejam $A = \{ 0, 1, 2 \}$, $B = \{ a, b \}$ e $R: A \to B$

- $R = \{ \langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle \}$

R *não* é isomorfismo. Prova *por absurdo*

Suponha que R *é* isomorfismo. Então, R possui relação inversa $S: B \to A$

$$S \circ R = id_A \quad \text{e} \quad R \circ S = id_B$$

- $S \circ R = id_A \Rightarrow$ definição de relação identidade
- $\langle 2, 2 \rangle \in S \circ R \Rightarrow$ definição de composição
- $(\exists x \in A)(\langle 2, x \rangle \in R \wedge \langle x, 2 \rangle \in S)$ *absurdo*! Não existe $\langle 2, x \rangle$ em R

Portanto, R *não* é isomorfismo

Exp: Isorrelação

$A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$, $C = \{ 0, 1, 2 \}$ e X conjunto qualquer

- $id_B: B \to B$ ✔
- $id_X: X \to X$ ✔
- $\{ \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 0\rangle \}: C \to C$ ✔

- $\varnothing: A \to B$ ✘
- $A \times B: A \to B$ ✘
- $<: C \to C$ ✘
- $x^2: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ onde $x^2 = \{ \langle x, y\rangle \in \mathbf{Z}^2 \mid y = x^2 \}$ ✘

Teorema: Isorrelação $\leftrightarrow$ Monorrelação e Epirrelação

$R: A \rightarrow B$ relação. Então R é uma isorrelação sse

- R é monorrelação
- R é epirrelação

Portanto, uma isorrelação é

- total
- injetora
- funcional
- sobrejetora

Resultado pode auxiliar na determinação se

- *é* isorrelação
- *não* é isorrelação

◆ Isomorfismo: importante resultado que pode ser deduzido

- conjuntos origem e destino
  - ∗ possuem o mesmo número de elementos
- explorado detalhadamente no estudo da cardinalidade de conjuntos
  - ∗ número de elementos
- conjuntos com mesmo cardinal
  - ∗ são ditos "iguais" (semanticamente)
  - ∗ a menos de uma relação de troca de nomes dos elementos
  - ∗ ou seja, a menos de uma isorrelação
- em muitas teorias, para enfatizar que nomes não são importantes

iguais a menos de isomorfismo

Exp: Igualdade a Menos de Isomorfismo: Produto Cartesiano

Sabe-se que: produto cartesiano é uma operação *não*-comutativa

Exemplo: $A = \{ a, b \}$ e $B = \{ 0, 1 \}$

- $A \times B = \{ \langle a, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle \}$
- $B \times A = \{ \langle 0, a \rangle, \langle 0, b \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle \}$

conjuntos diferentes

Entretanto, são isomorfos

- $\text{troca}: A \times B \rightarrow B \times A$ - troca as componentes

$$\text{troca} = \{ \langle \langle a,0 \rangle, \langle 0,a \rangle \rangle, \langle \langle a,1 \rangle, \langle 1,a \rangle \rangle, \langle \langle b,0 \rangle, \langle 0,b \rangle \rangle, \langle \langle b,1 \rangle, \langle 1,b \rangle \rangle \}$$

- possui como inversa a relação dual $\text{troca}^{-1}: B \times A \rightarrow A \times B$

$$\text{troca}^{-1} = \{ \langle \langle 0,a \rangle, \langle a,0 \rangle \rangle, \langle \langle 1,a \rangle, \langle a,1 \rangle \rangle, \langle \langle 0,b \rangle, \langle b,0 \rangle \rangle, \langle \langle 1,b \rangle, \langle b,1 \rangle \rangle \}$$

Exp: …Igualdade a Menos de Isomorfismo: Produto Cartesiano

Claramente

$$\text{troca}^{-1} \circ \text{troca} = id_{A \times B} \quad \text{e} \quad \text{troca} \circ \text{troca}^{-1} = id_{B \times A}$$

Generalização: exercício

- quaisquer dois conjuntos A e B
- $A \times B$ é isomorfo ao $B \times A$
- *iguais a menos de isomorfismo*

4 – Relações

4.6 Banco de Dados Relacional

◆ Bancos de dados

- comuns na grande maioria das aplicações computacionais
  - ∗ de algum porte
  - ∗ de razoavel complexidade
- permite manipular os dados com maior eficência e flexibilidade
- atende a diversos usuários
- garante a integridade (consistência) dos dados

- **Resumidamente, um banco de dados é**

  um conjunto de dados integrados cujo objetivo é atender a uma comunidade de usuários

- **Banco de dados relacional**
  - dados são conjuntos (representados como tabelas)
  - relacionados com outros conjuntos (tabelas)

Exp: Banco de Dados Relacional

País
Brasil
Turquia
Alemanha
Coréia do Sul

Continente
América
Oceania
África
Ásia
Europa

Fica em	
Brasil	América
Alemanha	Europa
Turquia	Europa
Turquia	Ásia
Coréia do Sul	Ásia

Fica em	América	Oceania	África	Ásia	Europa
Brasil	1	0	0	0	0
Alemanha	0	0	0	0	1
Turquia	0	0	0	1	1
Coréia do Sul	0	0	0	1	0

◆ Endorrelações em um banco de dados relacional

Semifinais	/ Final
Copa	2002
Brasil	Turquia
Alemanha	Coréia Sul
Brasil	Alemanha

Semifinais/Final Copa 2002	Bra	Tur	Ale	Cor
Brasil	0	1	1	0
Alemanha	1	0	0	1
Turquia	1	0	0	0
Coréia Sul	0	1	0	0

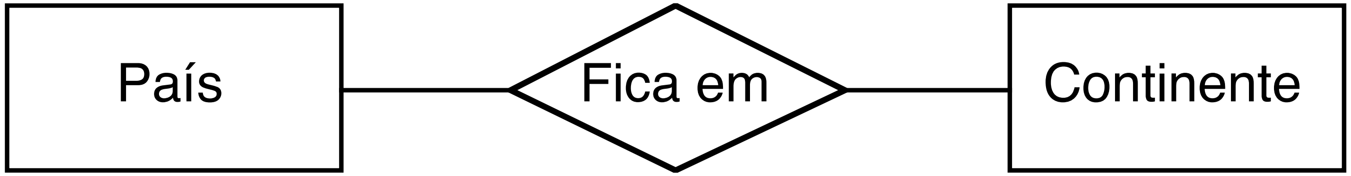
◆ Modelo conceitual

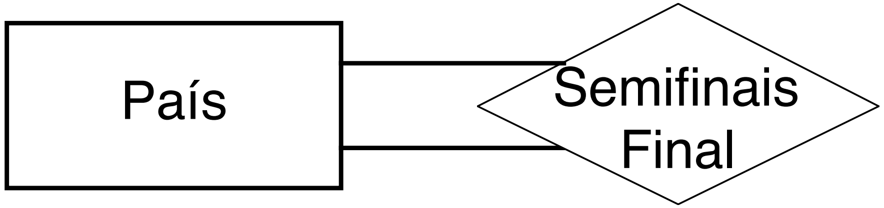
- modelo abstrato de dados
  - ∗ descreve a estrutura de um banco de dados
  - ∗ independentemente de implementação
- usado para o projeto de um banco de dados
- modelo freqüentemente adotado
  - ∗ diagrama entidade-relacionamento
  - ∗ ou simplesmente diagrama E-R

◆ Diagrama entidade-relacionamento ou Diagrama E-R

- entidades: conjuntos representados por retângulos

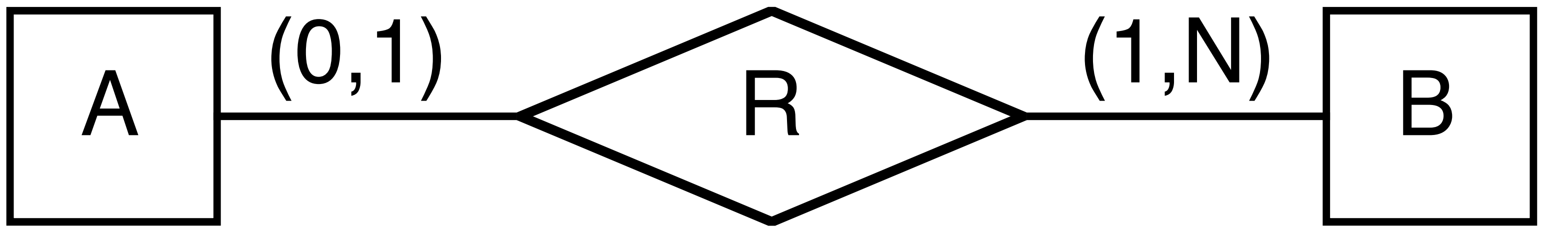
- relacionamentos: representado por losângulos





◆ Número de elementos que podem ser relacionados em

- 0, 1 ou N (mais que um)



- (1,N) - cada $a \in A$ está relacionado com, no mínimo 1 e, no máximo N elementos de B
- (0,1) - cada $b \in B$ está relacionado com, no mínimo 0 e, no máximo 1 elemento de A

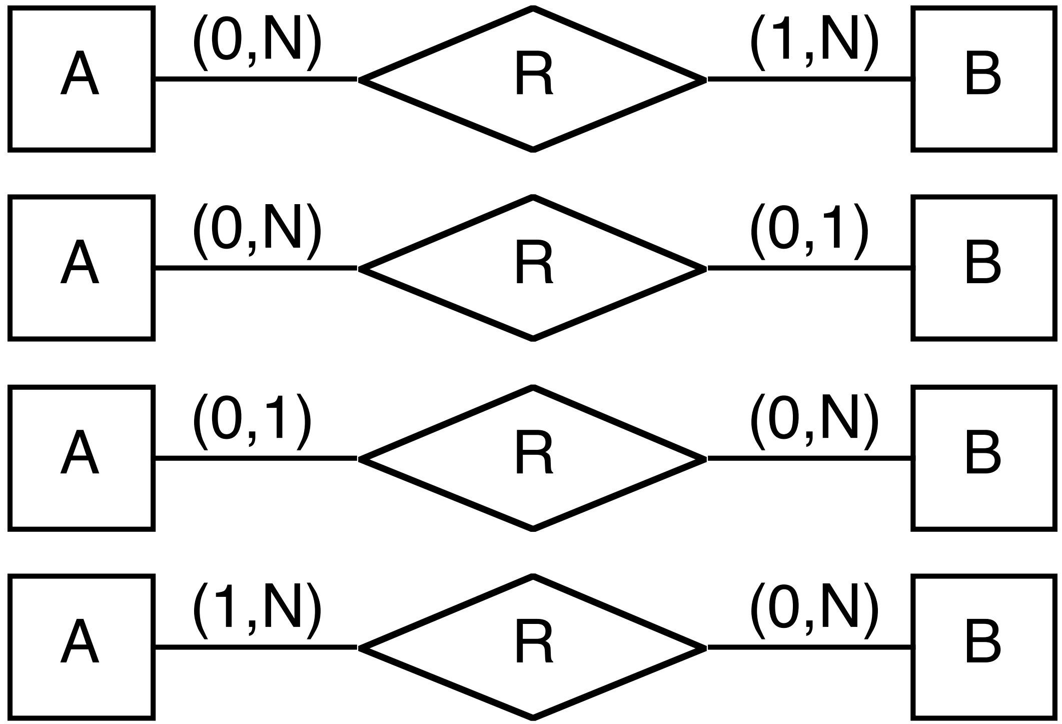
◆ Alguns tipos de relações

Relação Total

Relação Funcional

Relação Injetora

Relação Sobrejetora



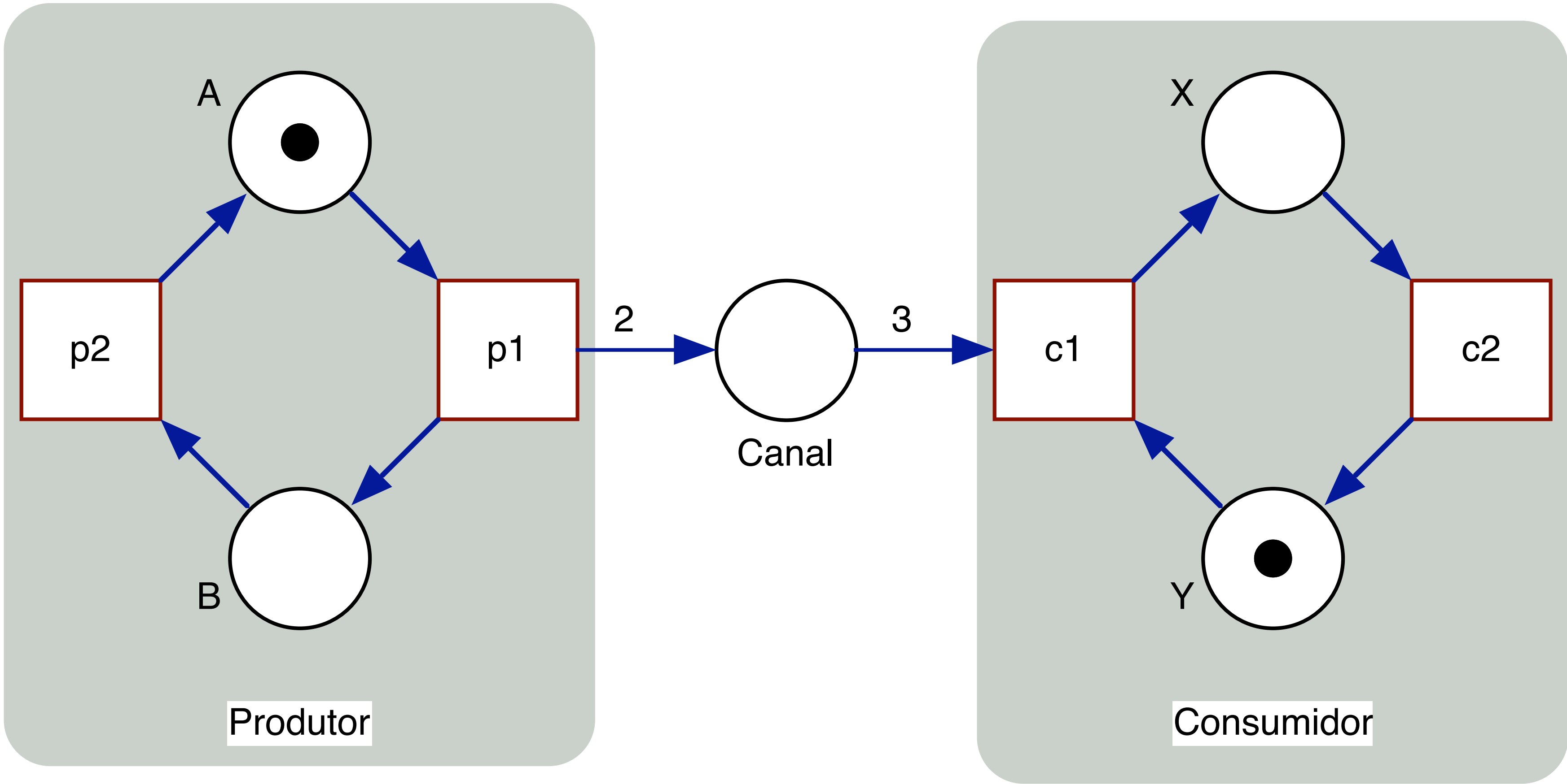
- como seria o diagrama de uma monorrelação?
- e de uma epirrelação?

4 – Relações

4.7 Rede de Petri

- **Rede de Petri**
  - provavelmente, o modelo do tipo concorrente mais usado em CC
- **Conceito de rede de Petri**
  - introduzido através de exemplo
- **Por fim, rede de Petri como uma relação**

Exp: Rede de Petri - Produtor e Consumidor



Produtor e Consumidor: processos concorrentes

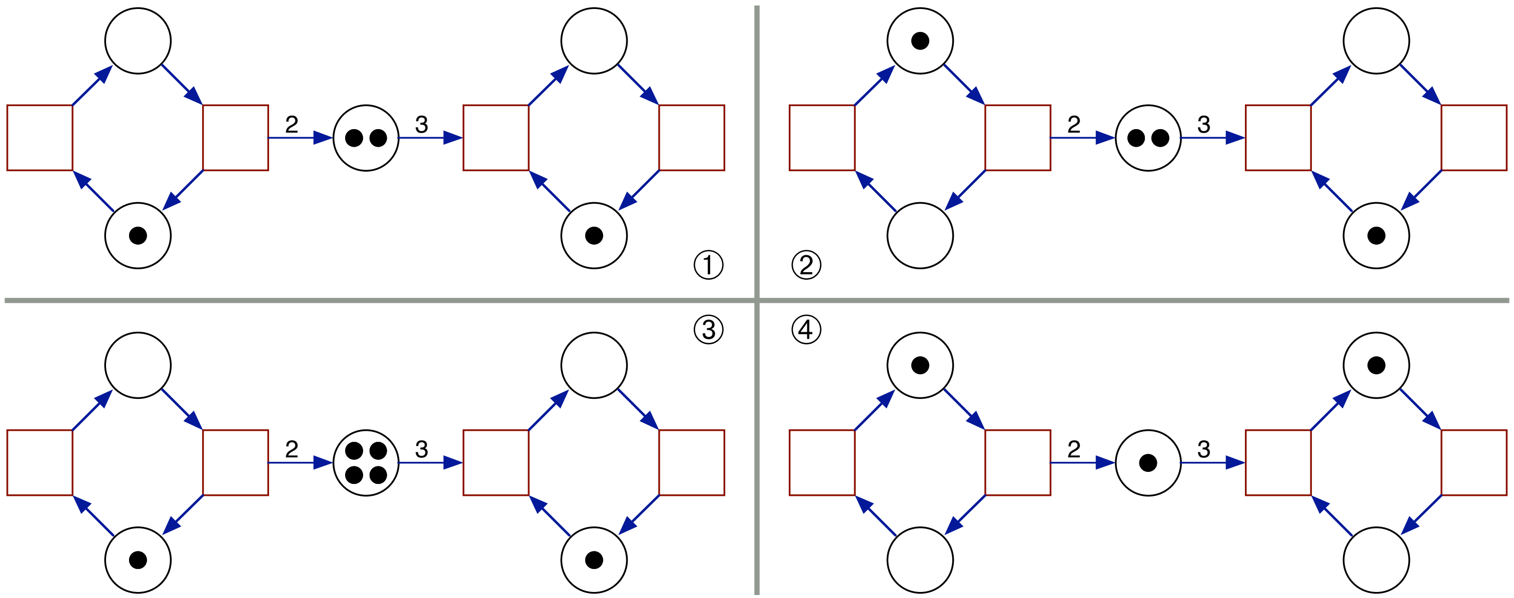
- trocam recursos através do Canal

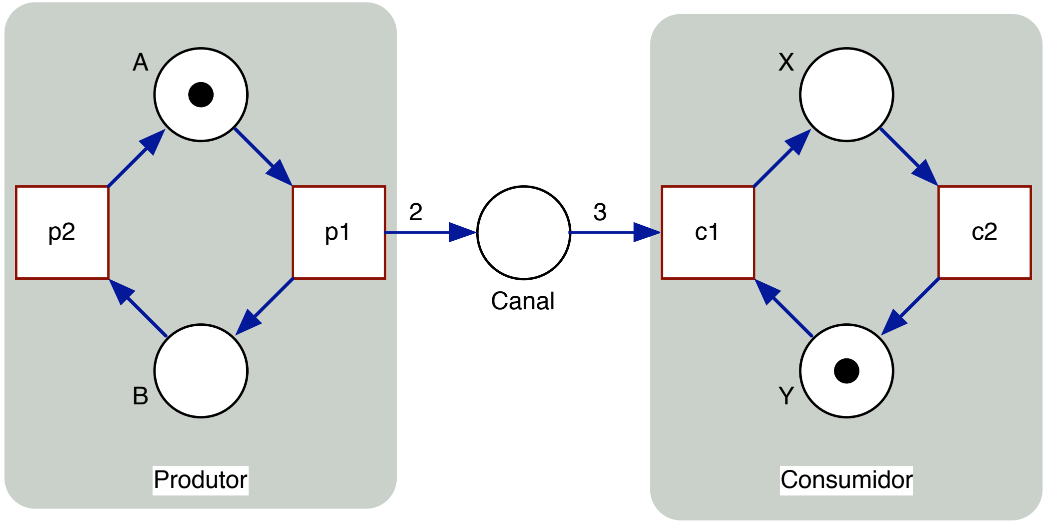
Exp: ...Rede de Petri - Produtor e Consumidor

- nodos: lugares
- lugares podem conter marcas (tokens)
  - exemplo: um recurso para ser consumido nos lugares A e Y
- arcos: são transições (quadrados) ou computações atômicas
  - pode possuir mais de um lugar como origem ou destino
- a cada lugar origem (destino) é associado um valor
  - quantos recursos serão consumidos (produzidos)
  - quando da execução da transição
  - valor 1 é usualmente omitido
- transição habilitada
  - recursos necessários estão disponíveis nos lugares origem

Exp: ...Rede de Petri - Produtor e Consumidor

- execução de uma transição
  - ∗ recursos de cada lugar origem são consumidos
  - ∗ recursos de cada lugar destino são produzidos
- processamento: sucessiva aplicação de computações atômicas
  - ∗ mais de uma transição pode estar habilitada
  - ∗ processamento concorrente (se não consomem mesmo recurso)





Observe que

- com origem no lugar A, p1 consome uma marcação
- p1, com destino no lugar B, produz uma marcação
- p1, com destino no lugar Canal, produz duas marcações

Como pares ordenados

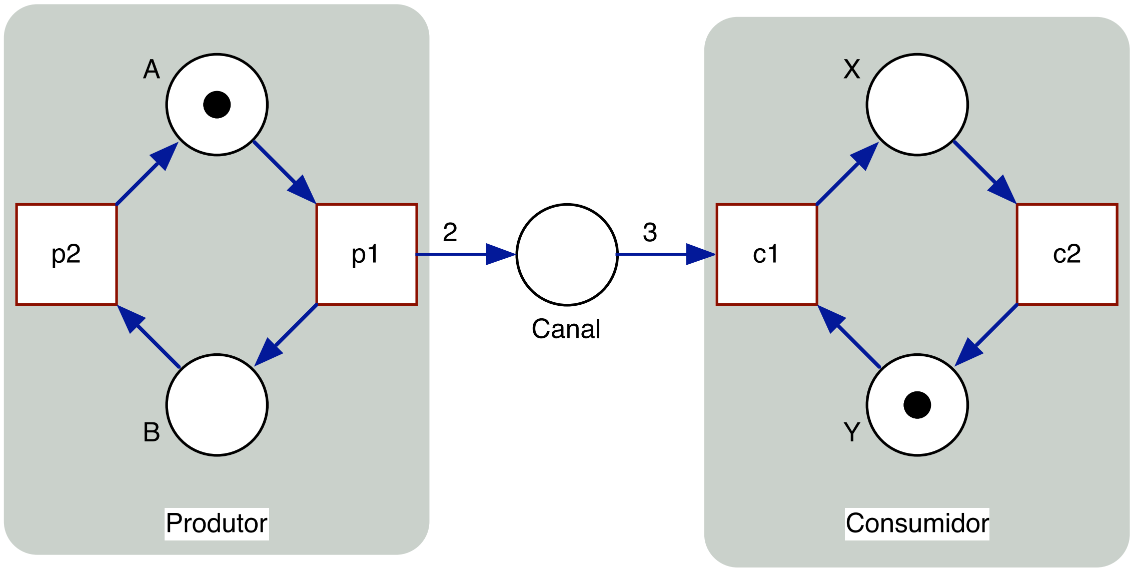
- ⟨⟨A, p1⟩, 1⟩
- ⟨⟨p1, B⟩, 1⟩
- ⟨⟨p1, Canal⟩, 2⟩

◆ Rede de Petri como uma relação P

- L - conjunto de lugares
- T - conjunto de transições

$$P: (L \times T) + (T \times L) \rightarrow \mathbf{N}$$

- $\langle\langle A, t\rangle, n\rangle$ - transição t, com *origem* em A, *consome* n marcações
- $\langle\langle t, A\rangle, n\rangle$ - transição t, com *destino* em A, *produz* n marcações
- união disjunta?



◆ Todos os pares

- ⟨⟨A, p1⟩, 1⟩
- ⟨⟨p1, B⟩, 1⟩
- ⟨⟨p1, Canal⟩, 2⟩

⟨⟨Canal, c1⟩, 3⟩
⟨⟨Y, c1⟩, 1⟩
⟨⟨c1, X⟩, 1⟩

- ⟨⟨B, p2⟩, 1⟩
- ⟨⟨p2, A⟩, 1⟩

⟨⟨X, c2⟩, 1⟩
⟨⟨c2, y⟩, 1⟩

◆ Observe que a relação define a rede

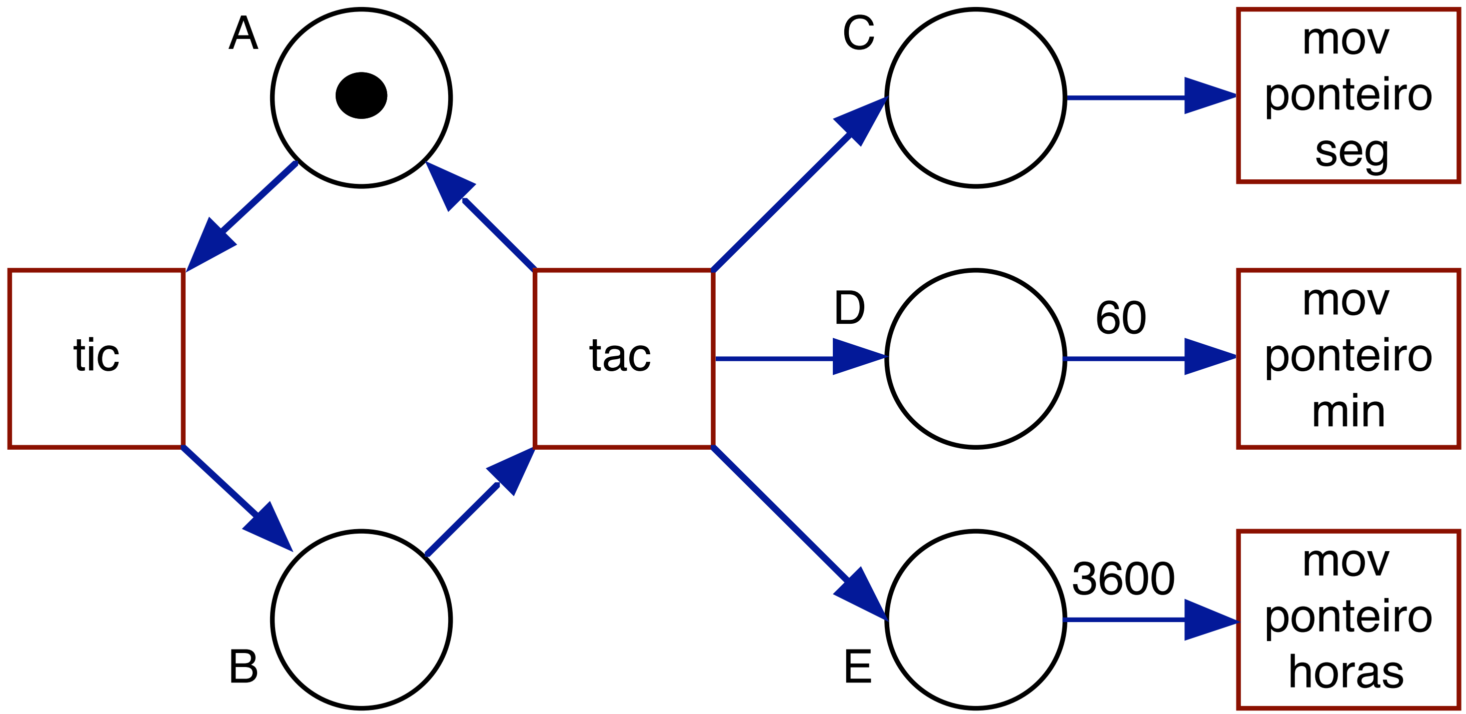
- mas *não* a sua marcação inicial
- uma rede pode ser executada para diversas marcações iniciais
  - ∗ marcação inicial é uma *opção* de execução
- normalmente não faz parte da definição da rede

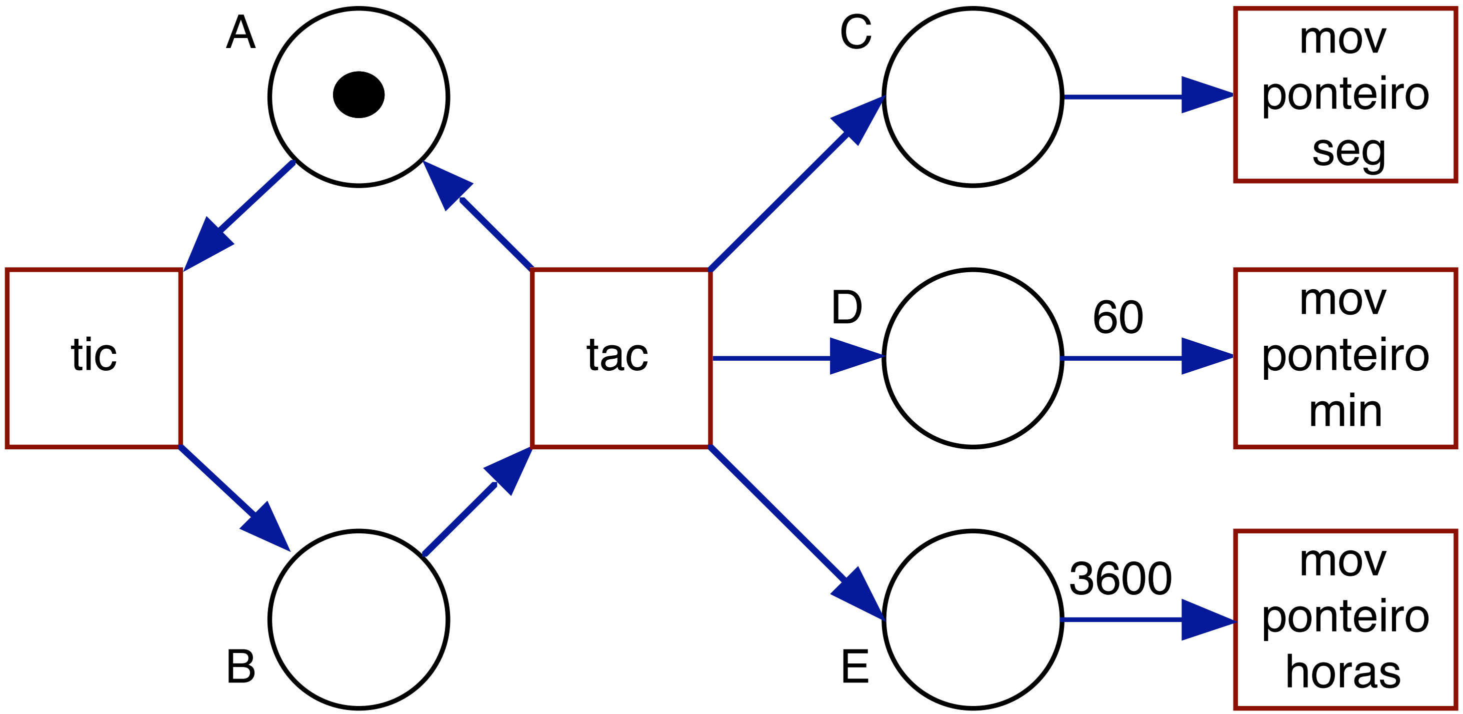
Exp: Rede de Petri - Relógio

- faz sequências de tic-tac
- tic-tac
  - um segundo
  - move ponteiro de segundos
- 60 segundos
  - move o ponteiro de minutos
- 3600 segundos
  - move o ponteiro das horas

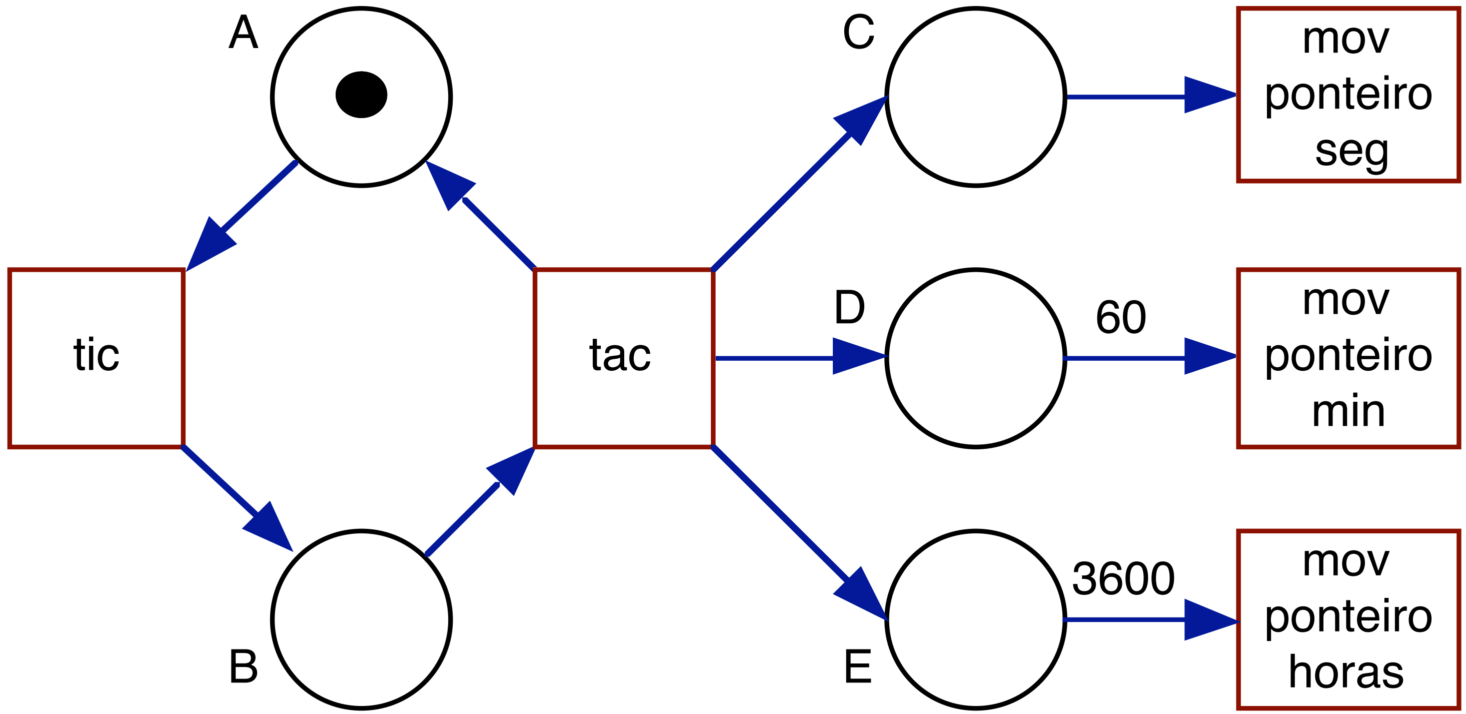
Exp: Rede de Petri - Relógio

- faz sequências de tic-tac
- tic-tac: um segundo e move ponteiro de segundos
- 60 segundos: move o ponteiro de minutos
- 3600 segundos: move o ponteiro das horas





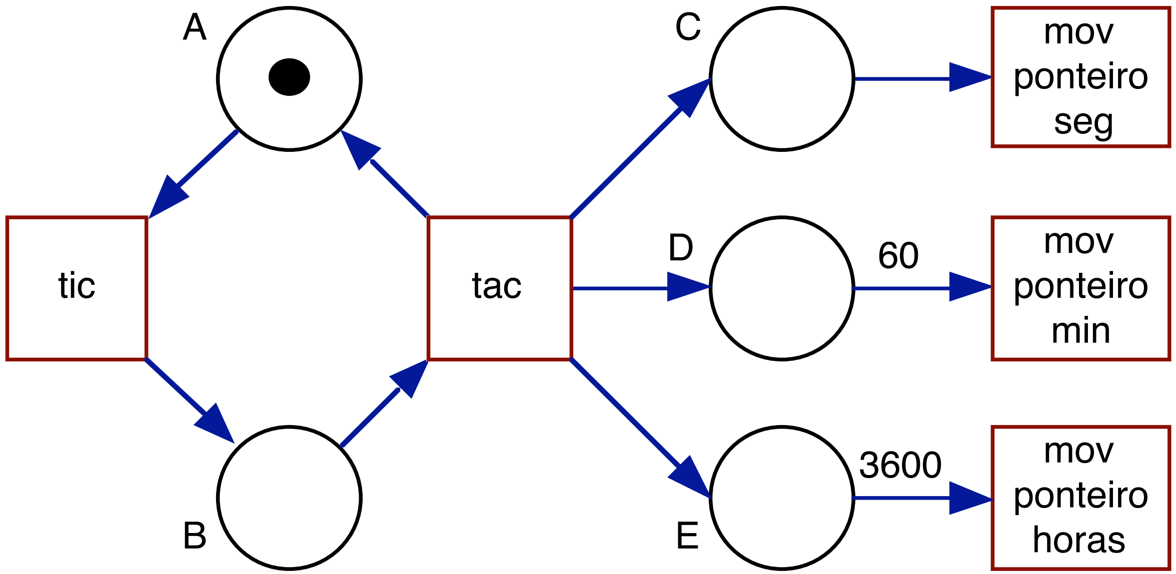
- **Transições que movem os ponteiros seg, min e horas**
  - consomem recursos mas *não* produzem qualquer recurso
  - sumidouros
  - fontes
    - dual de sumidouros: somente produzem, sem consumir



⟨⟨B, tac⟩, 1⟩	⟨⟨A, tic⟩, 1⟩
⟨⟨tac, A⟩, 1⟩	⟨⟨tic, B⟩, 1⟩
⟨⟨tac, C⟩, 1⟩	⟨⟨C, seg⟩, 1⟩
⟨⟨tac, D⟩, 1⟩	⟨⟨D, min⟩, 60⟩
⟨⟨tac, E⟩, 1⟩	⟨⟨E, horas⟩, 3600⟩

◆ Como seria?

- hora: badalada de um cuco
- número da hora (1 ~ 12 horas)
  - ⁎ número de badaladas do cuco



4 – Relações

4.8 Relações nas Linguagens de Programação

- **Relações não são normalmente disponíveis em LP**
  - excetuando-se algumas construções simples (predefinidas)
- **Pascal: exemplos de relações predefinidas**
  - igualdade e continência de conjuntos
  - implicação e equivalência lógica
  - igualdade e desigualdade entre
    - valores numéricos (tipo `integer` e `real`)
    - valores alfanuméricos (tipo `char`)

◆ Construções mais gerais

- necessitam ser construídas pelo programador

◆ Forma simples de implementar

- relações como matrizes
- podem ser implementadas usando arranjos bidimensionais
- exemplo: matriz 10×10 com células do tipo **boolean**

```
matriz = array[1..10, 1..10] of boolean
```

- acesso a cada componente
  - nome da variável arranjo + dois índices (linha e coluna)

```
matriz[2, 3] := true
```

```
if matriz[i, j] then ...
```

- **Importante restrição (usando arranjos)**
  - possui um número fixo de componentes
- **Número variável de células**
  - outros tipos de construções
  - permitem alocação dinâmica de memória
  - exemplo: ponteiros
    - possuem particularidades dependentes de cada linguagem
    - discussão foge do escopo da disciplina

Exercício - Implementação

Fazer um pequeno sistema que permita

- definir relações
- tratar construções correlatas como a investigação de seus tipos, cálculo da composição de relações, etc

Construa um pequeno sistema em (qq LP) capaz de

- definir até 6 conjuntos com até 5 elementos cada
- definir até 5 relações como matrizes sobre estes conjuntos
- verificar os tipos de uma relação
- calcular a relação dual
- calcular (e armazenar) a composição de duas relações
  - ∗ permitir todas as ações acima sobre a relação resultante

Matemática Discreta para Ciência da Computação

P. Blauth Menezes

Matemática Discreta para Ciência da Computação

P. Blauth Menezes

blauth@inf.ufrgs.br

Departamento de Informática Teórica

Instituto de Informática / UFRGS