Técnicas de Demonstração

Prof. Leandro I. Pinto

- Um teorema é uma proposição do tipo:

$$p \to q$$

A qual prova-se ser verdadeira sempre, ou seja:

$$p \Rightarrow q$$

- p é a hipotese
- q é a tese
- Demonstração: sequência de proposições que seguem a partir da hipótese que devem ser justificadas com passos lógicos, definições ou teoremas anteriormente demonstrados.

- Corolário: um teorema que é uma consequência quase direta de um outro já demonstrado;
- Lema: um teorema auxiliar que possui um resultado importante para a prova de um outro.

- Um teorema também pode ser apresentado na forma:

$$p \leftrightarrow q$$

Nesse caso, prova-se a ida: $p \rightarrow q$;

e também a volta: $q \rightarrow p$

** Exemplo geralmente não é prova

** No caso de um número finito e pequeno de elementos, pode-se testar caso a caso (prova por exaustão)

- Pressupõe-se a verdadeira a hipótese e, a partir desta, prova ser verdadeira a tese.

Se n e m são números pares, então n+m é um número par.

1. Definição de número par: n = 2r
2. $n = 2r$ e $m = 2s$
3. Então: $n + m = 2r + 2s = 2(r + s)$
4. Como tem a forma de um número natural, então n+m é par.

- Se um inteiro é divisível por 6, então duas vezes esse inteiro é divisível por 4.

- Trazer um exemplo de prova direta.

- Baseia-se no resultado:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

- A partir de $\neg q$ obter $\neg p$.

Prove que, para $n \in \mathbb{N}$:

$$n! > (n+1) \rightarrow n > 2$$

Por contraposição?

Prove que, para $n \in \mathbb{N}$:

$$n! > (n+1) \rightarrow n > 2$$

Por contraposição:

$$n \leq 2 \rightarrow n! \leq (n+1)$$

Melhorou?

- Se baseia no resultado:

$$p \to q \Leftrightarrow p \land \neg q \to F$$

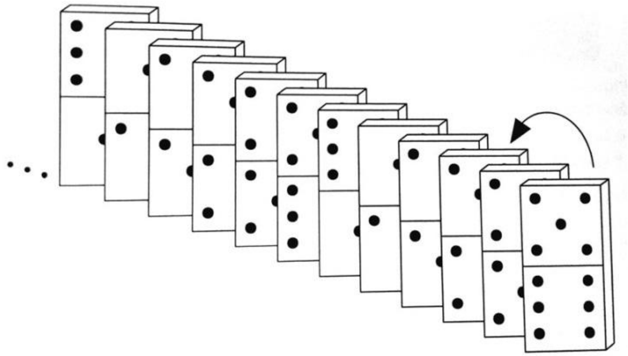
Ex.: O número 0 é o único elemento neutro da adição nos naturais.

0 é o único elemento neutro da adição

Reescrevendo ($p \rightarrow q$):

Se 0 é elemento neutro da adição em N,
então 0 é o único elemento neutro da adição em N

- O princípio da indução matemática é uma técnica para lidar com tipos de **dados** que tem uma relação de boa-ordem;
  - Todo subconjunto não vazio tem um elemento mínimo;
  - Ex.: Números naturais
- Pode-se aplicar indução para provar propriedades que valem para todo elemento do tipo de dado;
- O efeito dominó ilustra o princípio da indução.



Seja $p(n)$ uma proposição sobre $M = \{n \in N | n \geq m\ e\ m \in N\}$. O princípio da indução matemática é como segue:

a) $p(m)$ é verdadeira
b) Para qualquer $k \in M$, vale $p(k) \rightarrow p(k+1)$.
c) Então, para qualquer $n \in M$, $p(n)$ é verdadeira

Utiliza-se a seguinte denominação:

- Base de indução: $p(m)$
- Hipótese de indução: $p(k)$
- Passo de indução: $p(k) \implies p(k+1)$

- Prove $p(n)$: $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n^2+n}{2}$
- Base?
- Hipótese?
- Passo?

- Prove $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
- Prove $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

Referências

- MENEZES, Paulo Blauth. **Matemática discreta para computação e informática.** 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. 258 p. (Livros didáticos informática ufrgs ; 16). ISBN 9788577802692 (broch.)
- GERSTING, Judith L. **Fundamentos matemáticos para a ciência da computação:** um tratamento moderno de matemática discreta. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, c2004. 597 p. ISBN 9788521614227 (broch.).