Matemática Discreta

Lista de Exercícios 1

As definições a seguir podem ser úteis:

- Um *quadrado perfeito* é um inteiro n da forma $n = k^2$.
- Um número primo é um inteiro $n > 1$ que não é divisível por nenhum inteiro positivo diferente de 1 e de n.
- Dados dois números x, e y, $x < y$ significa $y - x > 0$.
- Um número par n pode ser escrito na forma $n = 2k$.
- Um número ímpar n pode ser escrito na forma $n = 2k - 1$.

1. Determine $V(p)$ e $V(q)$ em cada um dos seguintes casos, sabendo que:
   - $V(q) = V$ e $V(p \wedge q) = F$
   - $V(q) = F$ e $V(p \vee q) = F$
   - $V(q) = F$ e $V(p \to q) = F$
   - $V(q) = F$ e $V(q \to p) = V$
   - $V(p \to q) = V$ e $V(p \wedge q) = F$
   - $V(p \to q) = V$ e $V(p \vee q) = F$
   - $V(p \leftrightarrow q) = V$ e $V(p \wedge q) = V$
   - $V(p \leftrightarrow q) = F$ e $V(\neg p \vee \neg q) = V$

2. Construa a tabela verdade das seguintes fórmulas e identifique as que são tautologias ou contradições:
   - $\neg(p \vee \neg q)$
   - $p \wedge q \to p \vee q$
   - $p \to (q \to (q \to p))$
   - $(p \wedge q \to r) \vee (\neg p \leftrightarrow q \vee \neg r)$

3. Prove que se n = 25, 100 ou 169 então n é um quadrado perfeito e é a soma de dois quadrados perfeitos.

4. Prove que a soma de dois inteiros ímpares é par.

5. Prove que o quadrado de um número par é divisível por 4.

6. Prove que se dois inteiros são ambos divisíveis por um inteiro n, então a sua soma é divisível por n.

7. Prove que o produto dos quadrados de dois inteiros é um quadrado perfeito.

8. Prove ou apresente um contraexemplo: O produto de quaisquer três inteiros consecutivos é par.

9. Prove ou apresente um contraexemplo: A soma de um inteiro com o seu cubo é par.

10. Prove que se o quadrado de um inteiro é ímpar, então o inteiro tem que ser ímpar.

11. Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é 0.

12. Prove que a soma de três números consecutivos é divisível por 3.

13. Prove que o produto de dois inteiros consecutivos quaisquer é par.

14. A soma de quaisquer três inteiros consecutivos é par.

15. Prove que $2 + 6 + 10 + ... + (4n - 2) = 2n^2$.

16. Prove que $1 + 5 + 9 + ... + (4n - 3) = n(2n - 1)$.

17. Prove que $5 + 10 + 15 + ... + 5n = \frac{5n(n+1)}{2}$.

18. Prove que $n^2 > n + 1$ para $n \geq 2$.

19. Prove que $n^2 > 5n + 10$ para $n > 6$.

20. Prove que $2^{3n} - 1$ é divisível por 7.

21. Prove que $3^{2n} + 7$ é divisível por 8.

22. Prove: Se um número inteiro multiplicado por 2 não é divisível por 4, então esse número não é divisível por 6.

23. Se o produto de dois inteiros não é divisível por um inteiro n, então nenhum dos inteiros é divisível por n.

24. Dados x e y dois números naturais, xy é ímpar **se, e somente se**, ambos x **e** y são ímpares. *Atenção para o "se, e somente se", pois sua prova pode ficar pela metade....*

25. Seja a relação $E : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida a seguir:

$$mEn \Leftrightarrow m - n \text{ é par}$$

   (a) Indique se é verdadeiro ou falso:
   ( ) $4E0$
   ( ) $2E6$
   ( ) $2E - 3$
   ( ) $5E2$

   (b) Liste cinco números inteiros que estão relacionados por E com o número 1.

   (c) Prove que, se n é um número inteiro ímpar, então $nE1$.

26. Prove que as seguintes propriedades são verdadeiras ou falsas:

   (a) Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$.

   (b) Associatividade: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

   (c) Associatividade: $A - B = B - A$.

27. Considerando

$$(B \cup C) - (B \cap C) - A$$

faça:

(a) O diagrama de Venn para essa expressão;

(b) Mostre que

$$(B \cup C) - (B \cap C) - A \Leftrightarrow (B - A) \cup (C - A) - (B \cup C)$$

.

28. Mostre que se uma relação é irreflexiva, então ela é não transitiva ou não simétrica.

29. Para cada relação sobre o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$ abaixo, indique se é reflexiva, transitiva, simétrica e anti-simétrica. Em caso negativo, indique onde a propriedade falha.

(a) $R_1 = \{(0,0), (0,1), (0,3), (1,1), (1,0), (2,3), (3,3)\}$

(b) $R_2 = \{(0,0), (0,1), (1,1), (2,2), (2,3)\}$

(c) $R_3 = \{(2,3), (3,2)\}$

(d) $R_4 = \{(1,2), (2,1), (1,3), (3,1)\}$

(e) $R_5 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,2)\}$

(f) $R_6 = \{(0,1), (0,2)\}$

(g) $R_7 = \{(0,3), (2,3)\}$

(h) $R_8 = \{(0,0), (1,1)\}$

30. A partir das relações do exercício 29, calcule:

(a) $R_9 = R_1 \cup R_4$

(b) $R_{10} = R_5 - R_6$

(c) $R_{11} = \overline{R_2}$