Matemática Discreta

Lista de Exercícios 2

Exercícios

1. Mostre que a relação R sobre A é simétrica se e somente se $R = R^{-1}$.

2. Sejam $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$. Para cada item:

   - justifique por que são ou não são funções parciais;
   - determine o tipo da relação (injetora, sobrejetora, total ou funcional);

   (a) $\emptyset : A \to B$

   (b) $<: C \to C$

   (c) $\{(0, a), (1, b)\} : C \to B$

   (d) $=: A \to B$

   (e) $A \times B : A \to B$

   (f) $x^2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $x^2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | y = x^2\}$

   (g) $ad : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $ad(a, b) = a + b$

   (h) $div : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $div(x, y) = x/y$

3. Em que condições o conjunto vazio é:

   - Uma função parcial?
   - Uma função total?

4. Suponha $g : A \to B$ e $f : B \to C$ funções totais.

   (a) Mostre que se tanto f e g forem injetoras então $f \circ g$ também o é.

   (b) Mostre que se tanto f e g forem sobrejetoras então $f \circ g$ também o é.

5. Prove se as seguintes relações são injetoras:

   (a) $s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $s(a, b) = a + b$

   (b) $<: \{0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2\}$

   (c) $\{(0, a), (1, b)\} : \{0, 1, 2\} \to \{a, b\}$

6. A operação de divisão no conjunto dos números reais excetuando-se o número 0 possui um elemento neutro à direita, porém este não é elemento neutro à esquerda. Apresente uma outra operação que satisfaça a propriedade de ter elemento neutro à esquerda ou à direita, porém não ambas.

7. Seja $A = \{a, b, c\}$. Considere a operação interna $\oplus : A^2 \to A$ definida pela tabela ilustrada abaixo. Verifique e justifique se a operação satisfaz cada uma das seguintes propriedades: fechada, associativa, elemento neutro, elemento inverso e comutativa.

$\oplus$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	c

8. Considere a seguinte operação $\odot$ definida sobre o conjunto dos números naturais:

$$x \odot y = 2^{xy}$$

Verifique se $\odot$:

   (a) é comutativa;
   (b) se é associativa;
   (c) se tem elemento neutro;
   (d) prove que é sobrejetora.

9. Considere a operação $\cdot$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$x \cdot y = ax + by + cxy$$

onde a, b e c são números reais dados. Determine as condições para a, b e c de modo que $(\mathbb{R}, \cdot)$ constitua um monóide.

10. Suponha a, b e c elementos distintos de um dado conjunto A. Mostre que, relativamente a diagramas de Hasse:

   (a) A configuração da Figura 1a não pode aparecer em qualquer relação de ordem;
   (b) A configuração ilustrada na Figura 1b não pode aparecer em qualquer relação de ordem.

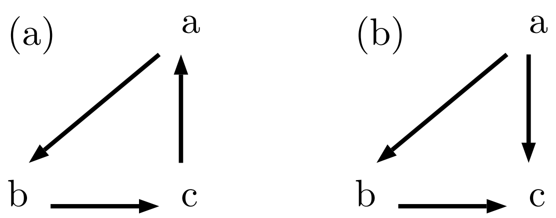

Figure 1: Diagramas de Hasse

11. Em qualquer cadeia não vazia:

   (a) Qualquer par de elementos possui soma? Nesse caso, qual é a soma?
   (b) Qualquer par de elementos possui produto? Nesse caso, qual é o produto?

12. Relativamente ao seguinte reticulado algebricamente definido:

$$(\{F, V\}, \wedge, \vee)$$

(a) Qual é a correspondente relação de ordem parcial?

(b) Faça o diagrama de Hasse da relação de ordem associada.

13. Uma loja de sorvetes permite que você escolha um sabor (baunilha, morango, pêssego, chocolate ou pistache), um acompanhamento (raspas de chocolate, castanhas ou tubetes) e uma cobertura (caramelo ou leite condensado) para montar a sobremesa da promoção do mês. Quantas sobremesas diferentes são possíveis?

14. No exercício anterior, quantas escolhas possíveis de sobremesa você tem se for alérgico a morango e a chocolate?

15. Quantos números de três dígitos menores do que 600 podem ser formados usando somente os algarismos 8, 6, 4 e 2?

16. Um conectivo lógico pode ser definido através de sua tabela-verdade. Quantos conectivos lógicos binários diferentes existem?

17. A partir do conjunto das sequências binárias de 8 bits.

    (a) Quantas sequências desse tipo existem?

    (b) Quantas começam e terminam com 0?

    (c) Quantas começam ou terminam com 0?

    (d) Quantas começam por 111?

    (e) Quantas contêm exatamente um 0?

    (f) Quantas são palíndromos? Ou seja a leitura da sequência da esquerda para a direita é igual à leitura da sequência da direita para a esquerda

18. Você está desenvolvendo um novo sabão para banho e contrata um grupo que faz pesquisas de opinião para pesquisar o mercado. O grupo afirma que em sua pesquisa com 450 consumidores as seguintes propriedades foram destacadas como sendo importantes na compra para sabão para banho:

Características	Amostra
Cheiro	425
Facilidade em ensaboar	397
Ingredientes naturais	340
Cheiro e facilidade em ensaboar	284
Cheiro e ingredientes naturais	315
Facilidade em ensaboar e ingredientes naturais	219
Todos os três fatores	147

    Você deveria confiar nesses resultados? Por quê?

19. Escreva a expressão para o cálculo de $|A \cup B \cup C \cup D|$.

20. Quantas cartas devem ser retiradas de um baralho padrão com 52 cartas para se obter, com certeza, duas cartas do mesmo naipe?

21. Um serviço de empregados domésticos por computador tem uma lista contendo 50 homens e 50 mulheres. São selecionados nomes aleatoriamente. Quantos nomes têm que ser selecionados para se garantir que apareça dois nomes de pessoas do mesmo sexo?

22. Prove que, se quatro números forem escolhidos do conjunto 1, 2, 3, 4, 5, 6, pelo menos um par tem que somar 7. Sugestão: encontre todos os pares de números do conjunto cuja soma seja 7.

23. Cada item a seguir define uma operação binária, denotada por $\cdot$, em um conjunto dado. Quais são associativas? Quais são comutativas?

    (a) Em $\mathbb{Z} : x \cdot y = \begin{cases} x \text{ se } x \text{ é par} \\ x+1 \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$

    (b) Em $\mathbb{N} : x \cdot y = (x+y)^2$

    (c) Em $\mathbb{R}^+$: $x \cdot y = \frac{1}{x+y}$

24. Mostre que a multiplicação de matrizes em $M_2(\mathbb{Z})$ é comutativa e associativa.

25. Se $|A \cap B| = 10$, $|B - A| = 5$ e $|A - B| = 7$, qual o valor de $|A \cup B|$? E de $|A|$ e de $|B|$. Resolva algebricamente.

26. Sejam ρ e σ relações binárias em $\mathbb{N}$ definidas por $x\rho y \leftrightarrow x$ divide y, $x\sigma y \leftrightarrow 5x \leq y$. Indique quais pares ordenados pertencem as relações correspondentes:

    (a) $\rho \cup \sigma; (2,6), (3,17), (2,1), (0,0)$

    (b) $\rho \cap \sigma; (3,6), (1,2), (2,12)$

    (c) $\rho^{-1}; (1,5), (2,8), (3,15)$

    (d) $\sigma^{-1}; (1,1), (2,10), (4,8)$

27. Em um grupo de 25 pessoas, é verdade que existem pelo menos 3 pessoas que nasceram no mesmo mês?

28. Uma livraria tem uma prateleira onde estão expostos cinco, três e quatro exemplares, respectivamente, dos três livros mais vendidos. Quantos arranjos diferentes desses livros podem ser feitos se livros com mesmo título não são distinguíveis?

29. Um time de futebol tem 18 jogadores entre titulares (11) e reservas. De quantas maneiras pode-se escolher o time titular?

30. Prove que, se colocar 5 pontos dentro de um quadrado de lado 1, pelo menos 2 pontos terão distância menor ou igual a $\sqrt{2}/2$. *Dica: divida o quadrado.*

Principais Definições

- Relação Funcional: $(\forall a \in A)(\forall b_1 \in B)(\forall b_2 \in B)(aRb_1 \wedge aRb_2 \rightarrow b_1 = b_2)$
- Relação Injetora: $(\forall b \in B)(\forall a_1 \in A)(\forall a_2 \in A)(a_1Rb \wedge a_2Rb \rightarrow a_1 = a_2)$
- Relação Total: $(\forall a \in A)(\exists b \in B)(aRb)$
- Relação Sobrejetora: $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(aRb)$
- Uma relação binária $\oplus$ é definida como: $\oplus : A \times B \rightarrow C$
- Relação de Equivalência: Uma relação binária que é reflexiva, simétrica e transitiva;
- Relação de Ordem Parcial: Uma relação binária em um conjunto S que seja reflexiva, anti-simétrica e transitiva.
- Operação interna: domínio e contra-domínio são definidos em A, ou seja: $\oplus : A \times A \rightarrow A$
- Operação fechada: operação total
- Comutativa: $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \oplus b = b \oplus a)$
- Associativa: $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c)$
- Elemento Neutro: $(\exists e \in A)(\forall a \in A)(a \oplus e = e \oplus a = a)$
- Elemento Inverso: $(\forall a \in A)(\exists \underline{a} \in A)(a \oplus \underline{a} = \underline{a} \oplus a = e)$
